Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen

Learning is the most powerful mechanism of cognitive development: Acquiring mathematical competencies

Stern, Elsbeth

Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin

Korrespondierender Autor/in

E-Mail: stern@mpib-berlin.mpg.de

Zusammenfassung

Auch für das Fach Mathematik gilt, dass fehlendes Wissen nicht durch Intelligenz kompensiert werden kann. Bereits vor Schulbeginn sind auf individueller Ebene einige für den Erwerb mathematischer Kompetenzen notwendige Rahmenbedingungen festgelegt, aber für den Übergang von der intuitiven zur kulturellen Mathematik ist schulische Unterstützung unabdingbar. Alle - auch die schwächer begabten Kinder - müssen frühzeitig lernen, dass Zahlen nicht nur zum Zählen genutzt werden können und dass sich der Nutzen von Addition und Subtraktion nicht auf die Beschreibung von Mengenveränderungen beschränkt. Gute mathematische Kompetenzen am Ende der Schulzeit sind das Ergebnis eines frühzeitig einsetzenden intelligenten Übungsprozesses mit intellektuell anregenden Aufgaben.

Summary

Intelligence cannot make up for lack of knowledge: this is also true for school mathematics. Part of the mental framework that is essential for acquiring mathematical competencies is determined, in the individual, even before school starts, but passing from intuitive mathematics to cultural mathematics requires the support of school settings. All children - even the less gifted - should learn early on that there is more to numbers than mere counting and that describing changing sets is not the only use addition and subtraction may be put to. Good mathematical competencies at the end of schooling are the result of an early start and an intelligent exercise procedure engaging pupils in intellectually stimulating tasks.

"Unabhängig von den unterschiedlichen Fähigkeiten und Talenten der Schüler muss alles gelernt werden, was später gewusst und gekonnt wird. Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung. Das gilt uneingeschränkt sowohl für hochbegabte Kinder als auch für schwächer begabte Schüler. In vielen Fällen ist dabei didaktische Unterstützung notwendig und wirksam. Noch so gut gemeinte motivationspsychologische oder sozialpädagogische Maßnahmen können für den eigentlichen Lernakt kein Ersatz, sondern nur eine oft sehr wirksame Voraussetzung sein." [1]

Früher als die meisten anderen Lehr-Lern-Forscher erkannte Franz E. Weinert, dass hohe Intelligenz nur von Vorteil ist, wenn sie zuvor in bereichsspezifisches Wissen umgesetzt wurde. In der viel zitierten Arbeit von

Schneider, Körkel und Weinert [2] wurde gezeigt, dass mangelnde Intelligenz durch Wissen kompensiert werden kann, während sich fehlendes Wissen nicht durch hohe Intelligenz ausgleichen lässt. Allerdings bezweifelten einige Intelligenzforscher die Generalisierbarkeit der Ergebnisse auf stärker an die Intelligenz gebundene Inhaltsbereiche. In diesem Beitrag werden Ergebnisse aus den von Franz E. Weinert geleiteten Längsschnittstudien LOGIK und SCHOLASTIK vorgestellt, die die Bedeutung des Vorwissens auch für einen Inhaltsbereich belegen, der wie kaum ein anderer mit der Intelligenz assoziiert wird: die Mathematik.

Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen: Von der intuitiven zur kulturellen Mathematik

Die Leichtigkeit, mit der Kinder lernen, im kleineren Zahlenbereich zu zählen und die Veränderung von Mengen zu modellieren, steht im Widerspruch zu den Ergebnissen, die die immensen Schwierigkeiten belegen, die Mathematik als Schulfach bereiten kann. Ergebnisse der Säuglingsforschung zeigen inzwischen eindrucksvoll die modularisierten Grundlagen mathematischer Kompetenzen [3]. Das universell verfügbare, intuitive mathematische Wissen erleichtert die Übertragung der mathematischen Sprache auf Situationen der wahrnehmbaren Welt. Eine Menge von Gegenständen oder Ereignissen kann durch Zählen erfasst werden, und die Vergrößerung oder Verkleinerung von Mengen kann mit Hilfe der Addition und Subtraktion nachvollzogen werden. Auf der Grundlage einfacher mathematischer Symbole sind insbesondere in Verbindung mit grafisch-visuellen Veranschaulichungen im Lauf der kulturellen Entwicklung komplexe mathematische Konzepte entstanden, die Wissenschaft und Technik voranbrachten. Trotz der überwältigenden Bedeutung der Mathematik in modernen Industriegesellschaften sind Menschen, die mathematische Kompetenzen problemlos erwerben, in der Minderheit. Auch bei vielen Menschen mit Abitur gehen die mathematischen Kenntnisse nicht über die Prozentrechnung hinaus. Defizite im mathematischen Verständnis werden insbesondere beim Lösen komplexer Textaufgaben offensichtlich, für die keine fertige Lösung abgerufen werden kann.

Kintsch und Greeno [4] präsentierten vierzehn einfache Textaufgaben, die mit Gleichungen wie $8 - 3 = 5$ oder $5 + 3 = 8$ gelöst werden konnten. Trotzdem gab es deutliche Schwierigkeitsunterschiede zwischen den Aufgaben. Die Lösungsrate für Austauschaufgaben *(Maria hatte acht Murmeln. Dann gab sie Hans drei Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?)* lag bei neunzig Prozent, während die Lösungsrate für Vergleichsaufgaben *(Maria hat acht Murmeln. Sie hat drei Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?)* bei zwanzig Prozent lag. Für Aufgaben zur Kombination von Mengen *(Maria und Hans haben zusammen acht Murmeln. Maria hat drei Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?)* wurden Lösungsraten von fünfzig Prozent berichtet. Die Diskrepanz in der Lösungsrate zwischen Aufgaben mit gleicher mathematischer Struktur wird bei folgender Aufgabe besonders offensichtlich: Die Aufgabe *Fünf Vögel haben Hunger. Sie finden drei Würmer. Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?* wird von achtzig Prozent der Vorschulkinder gelöst. Endet die Aufgabe hingegen mit der Frage *Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?*, liegt selbst bei Drittklässlern die Lösungsrate unter dreißig Prozent.

Ein unzulängliches Sprachverständnis sowie mangelndes konzeptuelles mathematisches Wissen lassen Kinder an bestimmten Aufgaben scheitern [4]. Um Vergleichsaufgaben zu lösen, benötigt man ein fortgeschrittenes Zahlverständnis, das über die Zählfunktion von Zahlen hinausgeht [5]. Die im Satz *Hans hat fünf Murmeln mehr als Peter* gegebene Information bezeichnet keine konkrete, existierende Menge, sondern beschreibt die Relation zwischen zwei Mengen. Man muss ein mentales Modell - also eine von den konkreten Dingen abstrahierte geistige Vorstellung - von der in der Textaufgabe beschriebenen Situation entwickeln. Wer beispielsweise mit der Zahl *5* lediglich fünf Gegenstände verbindet, der wird den Satz nicht verstehen. Wer hingegen *5* als einen Abschnitt auf dem Zahlenstrahl versteht, der die Relation zwischen zwei anderen Zahlen markiert - zum Beispiel zwischen *2* und *7* oder zwischen *4* und *9* -, der kann Vergleichsaufgaben verstehen. Textaufgaben zum Mengenvergleich sind ein guter Indikator für ein fortgeschrittenes mathematisches Verständnis im Grundschulalter.

Früh übt sich: Die Langzeitstabilität interindividueller Unterschiede in der Mathematikleistung

In der LOGIK-Studie sowie in der SCHOLASTIK-Studie wurden während der gesamten Grundschulzeit Textaufgaben zum additiven und multiplikativen Vergleich von Mengen vorgegeben. Da derartige Aufgaben im deutschen Grundschulunterricht nur sehr selten vorkommen, müssen sich die Schüler eigenständig Lösungsstrategien erarbeiten. In einer Folgestudie, der LOGIK-Follow-up-Studie, die durchgeführt wurde, als die Probanden im Durchschnitt siebzehn Jahre alt waren, wurde auch die mathematische Kompetenz erfasst, indem Aufgaben aus der Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) unter Zeitdruck vorgegeben wurden. Obwohl dieser Test sich vorwiegend auf den Schulstoff der achten Klasse bezieht, sind die Lösungen auch für mathematisch gebildete Personen nicht leicht lösbar, wie folgende Beispielaufgabe zeigt: *Welcher x-Wert erfüllt die Gleichung* $x^2 -14x + 49 = 0$*?: A) 7 und 0, B) 7, C) −14, D) 7 und −7, E) 14 und 0.* Um eine breite Streuung der Ergebnisse zu erreichen, wurden so viele Aufgaben dieser Art vorgegeben, dass es auch für einen Experten in Mathematik unmöglich ist, in der knappen Zeit alle Aufgaben zu lösen.

Intelligenz und Mathematikleistung im Grundschulalter sowie Leistung in der elften Klasse verhalten sich wie folgt zueinander: Zwischen dem Lösen mathematischer Textaufgaben in der zweiten Klasse und der Mathematikleistung in der elften Klasse gibt es eine enge Wechselbeziehung (Korrelation). Keine Wechselbeziehung gibt es hingegen zwischen der Intelligenz der zweiten Klasse und der Mathematikleistung der elften Klasse. Die Intelligenz der elften Klasse korreliert demnach nicht so hoch mit der Mathematikleistung der elften Klasse wie die Leistung im Lösen von Textaufgaben in der zweiten Klasse. Diese Korrelation basiert nicht auf Ausreißern. Gleichzeitig zeigt sich auch, dass kein Teilnehmer der LOGIK-Studie, der nicht bereits in der zweiten Klasse überdurchschnittliche Leistungen im Lösen von Textaufgaben zeigte, in der elften Klasse gute bis sehr gute Werte erreichte. Hingegen gab es eine Reihe von Schülern, die zwar in der zweiten Klasse noch überdurchschnittliche Leistungen erbrachten, später aber in den durchschnittlichen oder gar unterdurchschnittlichen Bereich zurückfielen. Aus den Daten geht hervor, dass ein frühes mathematisches Verständnis, das sich im Lösen anspruchsvoller Textaufgaben ausdrückt, eine notwendige, aber keinesfalls hinreichende Voraussetzung für spätere mathematische Kompetenzen ist.

Um den Einfluss des spezifischen Wissens und der aktuellen Intelligenz auf das Lösen von Mathematikaufgaben zu trennen, wurde eine so genannte Kommunalitätenanalyse durchgeführt, deren Ergebnisse zeigten, dass der Anteil der "reinen" Intelligenz an den interindividuellen Unterschieden im mathematischen Problemlösen nur sehr gering ist. Der Einfluss der Intelligenz zeigt sich vorwiegend in der "konfundierten Varianz". Diese sagt aus, dass sich Kinder mit einer höheren Intelligenz auf Dauer mehr mathematisches Wissen aneignen und deshalb bessere Leistung erbringen. Die Leistungsverbesserung aufgrund von Intelligenz ist jedoch deutlich geringer als die, die auf größeres mathematisches Vorwissen zurückzuführen ist. Defizite in der Intelligenz können durch Vorwissen offensichtlich kompensiert werden, Defizite im mathematischen Vorwissen hingegen nicht.

Die Ergebnisse der LOGIK-Follow-up-Studie zeigen, dass auch in einem intelligenznahen Gebiet wie der Mathematik gute Leistungen entscheidend vom Vorwissen abhängen. Bereits in der zweiten Klasse zu wissen, dass Zahlen nicht nur zur Veranschaulichung der Mächtigkeit und der Veränderung von Mengen genutzt werden können, sondern auch zur Abbildung von Relationen zwischen Mengen, scheint eine notwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingung für eine hohe mathematische Leistungsfähigkeit in der späten

Sekundarstufe zu sein. Die LOGIK-Daten sprechen sogar dafür, dass frühe Versäumnisse bei der Unterstützung eines anspruchsvollen mathematischen Verständnisses später nicht mehr kompensiert werden können. Dieses Ergebnis könnte zu fatalistischen Einstellungen führen. So könnte man meinen, wenn die "kritische Periode" für den Zugang zur kulturellen Mathematik versäumt wurde, sei "der Zug abgefahren". Oder aber man könnte ein frühes Verständnis der kulturellen Mathematik mit einer genetisch bestimmten mathematischen Begabung gleichsetzen. Beide Interpretationen sind jedoch gegenwärtig verfrüht. In unterschiedlichen Studien zum Mathematikunterricht der Grundschule zeigt sich nämlich, dass hier das Potenzial der Kinder nur unzureichend genutzt wird. Mehrfach wurde kritisiert, dass gerade anspruchsvolle Textaufgaben zum Vergleich von Mengen und später zum kartesischen Produkt so gut wie nie vorkommen [5]. Möglichkeiten in der Nutzung und Veranschaulichung von Textaufgaben sind in der Lehrerausbildung bisher wenig verankert [6]. Im Folgenden wird an Ergebnissen der SCHOLASTIK-Studie gezeigt, dass Lehrer trotz dieser ungünstigen Randbedingungen einen indirekten Einfluss auf das Lösen anspruchsvoller Textaufgaben haben.

Der Lehrer macht den Unterschied: Der Einfluss des pädagogischen Inhaltswissens der Lehrer auf die Lernfortschritte der Schüler

In Ländern mit relativ homogenen Schulbedingungen, in denen die Ausbildung der Lehrer sowie deren Zuweisung zu Schulen von staatlicher Seite zentral geregelt wird, tragen Lehrermerkmale vergleichsweise wenig zur Aufklärung interindividueller Leistungsunterschiede bei. Mindeststandards sind im Allgemeinen gewährleistet, und feste Vorgaben im Lehrplan lassen den Lehrern häufig wenig Spielraum für die Erprobung selbstständig geplanter Unterrichtsmethoden. Dennoch können bestimmte Merkmale und Verhaltensweisen der Lehrer für die Leistungsentwicklung mancher Schüler entscheidend sein.

"Obwohl die individuellen Fähigkeits-, Lern- und Leistungsunterschiede über die Zeit hinweg relativ stabil bleiben, sind die (individuell variablen) Lern- und Leistungsfortschritte eine Funktion der Quantität und Qualität des Lernens und werden mehr oder minder stark von der Wirksamkeit des Unterrichts beeinflusst. Schulleistungen sind also stets Leistungen der Schüler, die durch die Schule begünstigt oder erschwert werden." [1]

Das wissenschaftliche Potenzial der SCHOLASTIK-Studie ergibt sich insbesondere aus dem an bayerischen Grundschulen obligatorischen Lehrerwechsel von der zweiten zur dritten Klasse. Dieser ermöglicht es, die zwischen den Klassen gefundenen Unterschiede im Leistungszuwachs von der zweiten zur dritten Jahrgangsstufe dem Einfluss des in der dritten Klasse unterrichtenden Lehrers zuzuschreiben. Auch wenn deutschen Grundschullehrern wenig Freiraum bei der Auswahl der Inhalte des Mathematikunterrichts bleibt, können möglicherweise recht subtile Faktoren bedeutsam werden. Ein Merkmal, dem zunehmend Bedeutung geschenkt wird, sind die fachspezifischen pädagogischen Grundhaltungen der Lehrer. Darunter versteht man die Zusammenführung von Inhalt und Pädagogik zu einem Verständnis dessen, wie bestimmte Themen, Probleme oder Fragen strukturiert, dargestellt, an die Interessen und Fähigkeiten der Lernenden angepasst und für den Unterricht aufbereitet werden sollten. Ein guter Lehrer weiß, wie Schüler bestimmte Inhalte lernen. Aus unvollständigen Lösungen und Fehlern kann er erkennen, ob Kinder, selbst wenn sie noch nicht das Leistungskriterium erfüllen, auf dem richtigen Weg sind. Für den Mathematikunterricht ist die geistige Aktivität des Verstehens entscheidend. Auch wenn die Kognitionswissenschaften und die Lehr-Lern-Forschung noch weit davon entfernt sind, das Phänomen des Verstehens erklären zu können, gibt es doch einige allgemein akzeptierte Grundannahmen. Dazu gehört, dass Verstehen das Ergebnis eines aktiven Konstruktionsprozesses auf Seiten der Lernenden ist. Diese müssen Dinge erproben, Irrwege gehen und sie erkennen können, bevor sie einen Gegenstand wirklich verstehen können. Verstehen ist also nicht das Ergebnis der Übertragung von Wissen von den Lehrenden auf die Lernenden. Diese Auffassung wird unter dem Begriff des konstruktivistischen Lernens zusammengefasst. Für das Verstehen und Lösen von Textaufgaben ist eine aktive Konstruktion des zu Grunde liegenden Situationsmodells und dessen Umwandlung in eine mathematische Gleichung entscheidend.

Mithilfe von Fragebögen kann man die Grundhaltungen der Lehrer zur aktiven Rolle der Schüler beim Lösen von Textaufgaben erfassen [6]. Eine konstruktivistische Grundhaltung spiegelt sich beispielsweise in den folgenden Aussagen des Fragebogens wider:

Schüler sollten bereits Textaufgaben erhalten, bevor sie Rechenprozeduren gut beherrschen. - Lehrerinnen und Lehrer sollten Schüler ermutigen, ihre eigenen Lösungswege für Mathematikaufgaben zu suchen, selbst wenn diese ineffizient sind. - Mathematik sollte in der Schule so gelehrt werden, dass die Schüler Zusammenhänge selbst entdecken können.

Demgegenüber drückt sich eine rezeptive Grundhaltung zum Verstehen von Textaufgaben in folgenden Aussagen aus:

Lehrerinnen und Lehrer sollten für das Lösen von Textaufgaben detaillierte Vorgehensweisen vermitteln. - Um Mathematik zu lernen, ist es wichtig, dass Schüler gut zuhören können. - Effektive Lehrerinnen und Lehrer führen die richtige Art und Weise vor, in der eine Textaufgabe zu lösen ist.

Auf Anregung von Fritz Staub wurde der übersetzte Fragebogen zwei Jahre nach Beendigung der SCHOLASTIK-Studie den teilnehmenden Lehrern zugeschickt. Es zeigte sich ein erstaunlich enger Zusammenhang zwischen einer im Fragebogen geäußerten konstruktivistischen Grundhaltung und dem mittleren Lernfortschritt der Klasse im Lösen von Textaufgaben [6]. Das Vorwissen, also die am Ende der zweiten Klasse gemessene Mathematikleistung, ist ein besserer Vorhersagefaktor für die Mathematikleistung am Ende der dritten Klasse als die Intelligenz, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, dass die "konfundierte Varianz" aus Intelligenz und Mathematikleistung das Vorwissen mitbestimmt. Für das Lösen von Textaufgaben zeigt sich, dass die Lehrerüberzeugungen fast genauso viel Varianz aufklären wie die "reine" Intelligenz. Obwohl in der deutschen Grundschulmathematik kaum die Möglichkeit genutzt wird, das mathematische Verständnis mithilfe von Textaufgaben zu erweitern, lassen sich indirekte Effekte der Überzeugungen der Lehrer auf die mathematische Problemlösekompetenz der Schüler nachweisen. Lehrer, die sich der Bedeutung eines aktiven, problemorientierten Lernens von Mathematik bewusst sind, unterstützen das Lösen von Textaufgaben auch indirekt. Tatsächlich zeigte sich, dass Lehrer mit konstruktivistischer Grundhaltung häufiger konzeptuell anregende Mathematikaufgaben präsentierten. Die Ergebnisse zeigen, dass ein auf das Verständnis ausgerichteter Mathematikunterricht nicht das "Rechnen-Lernen" vernachlässigt. Klassen mit Lehrern, die eine konstruktivistische Grundhaltung vertraten, zeigten keine schlechteren Leistungen bei Additions- und Subtraktionsaufgaben als Klassen mit rezeptiv orientierten Lehrern. Bei Multiplikations- und Divisionsaufgaben zeigte sich sogar ein positiver Trend. Auch für den Einwand, dass ein anspruchsvoller, am Verständnis orientierter Mathematikunterricht zu Lasten der schwächeren Schüler gehe, gab es keinerlei Hinweise [6]. Auch konnten neben der Grundhaltung der Lehrer keine weiteren Einflussmerkmale wie Klassengröße oder mittleres Intelligenz- und Leistungsniveau der Klasse identifiziert werden.

Auch wenn der Anteil der auf Individualebene aufgeklärten Varianz durch Lehrerüberzeugungen nicht übermäßig groß ist, so bleibt doch zu beachten, dass sich immerhin fünfundzwanzig Prozent der zwischen den Klassen zu beobachtenden Varianz im Lernzuwachs bei Textaufgaben zur Addition und Subtraktion auf die Lehrerüberzeugungen zurückführen lassen. Die Bedeutung dieser Effekte darf aus mindestens drei Gründen nicht unterschätzt werden. Erstens könnte es beim gegenwärtigen Mangel an qualifizierten Mathematikern und Naturwissenschaftlern bereits als Erfolg gewertet werden, wenn sich durch einen anregenden Unterricht ein bis zwei Prozent mehr Schüler in diese Richtung orientieren würden. Zweitens bleibt zu bedenken, dass in der Analyse von Staub und Stern [6] lediglich der Effekt eines einzigen Schuljahres berücksichtigt wurde. Über die Jahre addiert können sich am Ende der Schulzeit beachtliche Effekte zeigen. Drittens bleibt zu berücksichtigen, dass die stark reglementierten Lehrplanvorgaben auch Lehrern mit einer konstruktivistischen Grundhaltung wenig Spielraum für die Darbietung anspruchsvoller Textaufgaben lassen. Es kann erwartet werden, dass sich eine konstruktivistische Grundhaltung der Lehrer stärker auf den Leistungszuwachs im Lösen anspruchsvoller Textaufgaben auswirken würde, wenn diese im Grundschullehrplan vorgesehen wären.

Literatur

[1] F.E. Weinert: Schulleistungen - Leistungen der Schule oder der Schüler? In: Leistungsmessungen in Schulen. (Hg.) F.E. Weinert. Beltz, Weinheim 2001, S. 85.

[2] W. Schneider, J. Körkel and F. Weinert: Domain-specific knowledge and memory performance. Journal of Educational Psychology, 81, 306-312 (1989).

[3] K. Wynn: Addition and subtraction by human infants. Nature, 358, 749-750 (1992).

[4] W. Kintsch and J.G. Greeno: Understanding and solving word arithmetic problems. In: Psychological Review, 92, 109-129 (1985).

[5] E. Stern: Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Pabst, Lengerich 1998.

[6] F.C. Staub and E. Stern: The nature of teacher's pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics. Journal of Educational Psychology, 93, 144-155 (2002).