Konstanten in der Arithmetik: Perioden und ihre Relationen

Martin Raum and Sven Raum

Zusammenfassung. Perioden sind eine Klasse von Zahlen, die in der Zahlentheorie eine besondere Rolle einnehmen. Ein wichtiger Teilaspekt sind Gleichheiten zwischen unterschiedlichen Darstellungen von Perioden. Diese lassen sich für L-Werte detaillierter untersuchen als für viele andere Beispiele.

Abstract. Periods are a special kind of numbers, which play an outstanding role in number theory. An important aspect to consider are relations between different representations of periods. These can be studied in great detail for L-values, which are more accessible than most other examples are.

1. Perioden

Eine Formel, die in der zurückliegenden wie gegenwärtigen Zahlentheorie eine große Rolle spielt, ist die Dirichletsche Klassenzahlformel. Ihre rechte Seite lautet

$$\frac{2^{r_1} \cdot (2\pi)^{r_2} \cdot h \cdot Reg}{w \cdot \sqrt{D}}.$$

Es treten sowohl Konstanten, 2 und π, als auch Variablen, r_1, r_2, h, w, D und Reg, auf, wobei die Letzteren von einem so genannten Körper abhängen. Ein Beispiel ist der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$, der aus allen reellen Zahlen $a + b\sqrt{10}$ besteht, für die a und b rationale Zahlen, also Brüche wie zum Beispiel $\frac{2}{3}$, sind. Für diesen Körper gilt $r_1 = 2$, $r_2 = 0$, $h = 2$, $w = 2$, $D = 40$ und schließlich $Reg = 1{,}81844645\ldots$ Die letzte dieser Zahlen ist von fundamental anderer Natur als die ersten fünf und schaut auch aus Sicht der modernen Mathematik mysteriös aus. Die Theorie der Perioden versucht die Frage zu beantworten, in welchem Kontext diese und andere Größen, die in der Arithmetik auftreten, sich verstehen lassen.

Kontsevich (IHES Paris) und Zagier (MPIM Bonn/Collège de France Paris) stellten in einer viel beachteten Übersichtsarbeit fest, dass Längen, Flächen, Volumina, etc. von geometrischen Objekten, die mithilfe rationaler Zahlen beschrieben werden können, eine besondere Rolle in der Welt aller Zahlen spielen sollten. Zur Veranschaulichung dienen hier zwei Beispiele: Die Kreisscheibe mit Durchmesser 2 lässt sich in einer Ebene mit Koordinaten x und y als die Menge solcher Punkte beschreiben, deren Koordinaten $1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 \leq 1$ erfüllen. Leicht lässt sich das an **Abbildung 1** verifizieren. Offensichtlich enthält die verwendete Ungleichung nur rationale Zahlen. Die auftretenden Zahlen sind sogar alle gleich 1. Dennoch ist die Fläche der durch sie beschriebenen Kreisscheibe nicht rational; bereits in der Schule wird vermittelt, dass sie π beträgt.

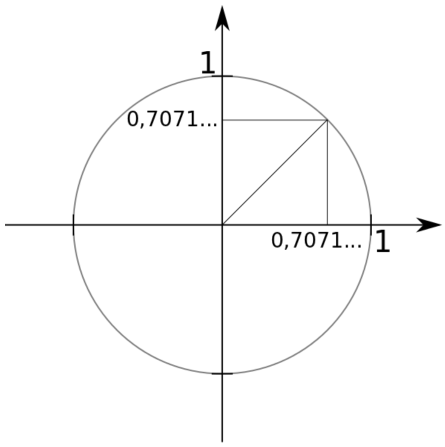

Abbildung 1. Darstellung eines Kreises durch rationale Polynome. Es gilt zum Beispiel $2 \cdot (0{,}7071\ldots)^2 = 1$.

Allgemein ist eine Periode nach Kontsevich und Zagier eine komplexe Zahl, deren Real- und Imaginärteil als Integral bestimmten Typs geschrieben werden können. Man betrachtet einen durch polynomiale Ungleichungen mit rationalen Koeffizienten beschriebenen Bereich im n-dimensionalen Raum. Auf diesem werden Quotienten von zwei Polynomen mit rationalen Koeffizienten integriert. Ein Beispiel, welches in **Abbildung 2** illustriert ist, ist das reelle Integral

$$\int_{x>2,\, y^2<x^3-\frac{8}{5}x+3} \frac{y^2}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Integrale dieser Art werden auch Periodenintegrale genannt.

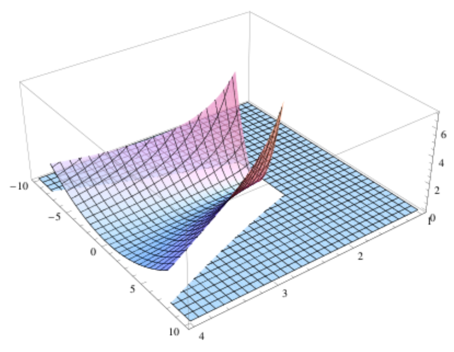

Abbildung 2. Plot einer Funktion, deren Integral eine Periode ist.

Viele Zahlen von Bedeutung sind Perioden. Ein Beispiel, für welches nicht sofort ersichtlich ist, dass es sich um eine Periode handelt, ist

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots = 1{,}202056\ldots,$$

welches der Wert der bekannten Riemannschen ζ-Funktion bei 3 ist. Im Gegensatz dazu wird beispielsweise vermutet, dass die Eulersche Zahl $e = 2{,}718281\ldots$ keine Periode ist.

Es ist bekannt, dass nur abzählbar viele Perioden existieren: Würde man sie alle aufzählen und dabei für die Nennung der ersten eine Sekunde benötigten, für die zweite eine halbe, dann eine viertel und so fort, so würde man sehr bald (nach zwei Sekunden) alle Perioden genannt haben. Dies ist eine Eigenschaft, die beispielsweise nicht für die Gesamtheit aller komplexen Zahlen gilt.

Aus mathematischer und insbesondere arithmetischer Perspektive noch weit wichtiger ist, dass dem Begriff der Periode der Begriff der abstrakten Periode gegenübergestellt werden kann. Die entscheidende Vermutung in diesem Zusammenhang ist, dass Perioden und abstrakte Perioden in einer Eins-zu-Eins-Korrespondenz stehen. Diese konkretisiert sich wie folgt. Aus drei elementaren Eigenschaften des Integrals, nämlich Additivität, Invarianz unter Variablenersetzungen und der Gleichheit im Satz von Stokes, ergeben sich verschiedene lineare Relationen der Periodenintegrale, bei denen alle Koeffizienten rationale Zahlen sind. Die erste Eigenschaft lautet zum Beispiel für Integrale über Funktionen einer Variablen

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Wenn außerdem ein Koordinatenwechsel $y = h(x)$ invertierbar ist und die Ableitung von h als h' notiert wird, so lautet die zweite

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(y)\, \mathrm{d}y = \int_a^b f\big(h(x)\big) \cdot h'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Die dritte Eigenschaft besteht für den Fall der Integration über eine Variable darin, dass

$$\int_a^b f'(x)\, \mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

gilt.

Die Problematik der Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Perioden und abstrakten Perioden entspringt der Fragestellung, ob die so erzeugten Relationen alle von Perioden erfüllten linearen Gleichungen ausschöpfen. Vor diesem Hintergrund handelt es sich um eine wichtige Aufgabe, lineare Identitäten zwischen Perioden zu finden, um die angesprochene Vermutung über ihren allgemeinen Charakter der Forschung zugänglich zu machen. Die Vermutung als Ganzes scheint hingegen mit Hilfe der mathematischen Werkzeuge, die derzeit zur Verfügung stehen, nicht lösbar zu sein.

2. Kritische L-Werte

Es ist bereits eine aufwendige und herausfordernde Aufgabe, Perioden als solche zu erkennen. *Automorphe L-Funktionen* sind eine mögliche Quelle von Perioden (siehe Jahrbuch 2010 von A. Mellit). Sie sind Funktionen, die im Wesentlichen einem komplexen Argument s einen Wert der Form

$$c_1 \cdot 1^{-s} + c_2 \cdot 2^{-s} + c_3 \cdot 3^{-s} + c_4 \cdot 4^{-s} + c_5 \cdot 5^{-s} + \cdots$$

zuweisen. Die offen gelassenen Konstanten c_1, c_2, etc. müssen nach sehr speziellen Regeln gewählt werden, die mit den *modularen q-Reihen*, die von Zagier (Jahrbuch 2008, MPI für Mathematik) beschrieben wurden, zusammenhängen. Diese speziellen Regeln implizieren auch, dass diese Reihen, die eigentlich nur für Argumente s mit großem

Realteil konvergieren, tatsächlich für alle komplexen Zahlen s Sinn ergeben. Die übliche Schreibweise für eine solche Funktion ist $L(s)$. Jeder dieser Funktionen ist eine gewisse Zahl k zugeordnet, die Gewicht genannt wird, und auf die im Detail nicht eingegangen werden soll. Sie steht allerdings mit einer sogenannten Funktionalgleichung im Zusammenhang, die unter Vernachlässigung gewisser Faktoren

$$L(s) = L(k - s)$$

lautet.

Ein erstes tief liegendes Resultat ist, dass für gewisse L-Funktionen die Werte $L(1)$, $L(2)$, $L(3)$ etc. Kontsevich-Zagier Perioden sind. Sie fallen also in die Klasse der Zahlen, die oben beschrieben sind. Die ersten $k - 1$ dieser Werte, $L(1)$ bis $L(k - 1)$, genannt kritische L-Werte, sind allerdings von grundsätzlich anderer Natur als die darauf folgenden. Sie gehen aus $L(1)$ und $L(2)$ durch Multiplikation mit rationalen Zahlen, also Brüchen, und einer Potenz von π hervor. Dieses Resultat von Manin (MPIM Bonn) wirft ein erstes Licht auf die Frage der Relationen, die Perioden erfüllen.

Zum Beispiel entsteht die L-Funktion $L_\Delta(s)$, für die $k = 12$ gilt, aus der Summe

$$1^{-s} - 24 \cdot 2^{-s} + 252 \cdot 3^{-s} - 1472 \cdot 4^{-s} + 4830 \cdot 5^{-s} + \cdots .$$

Es lässt sich berechnen, dass $L_\Delta(1) = 0{,}0374412812\ldots$ und $L_\Delta(3) = 0{,}3152415658\ldots$, und keine dieser beiden Zahlen lässt sich als Bruch schreiben. Dennoch gilt

$$\pi^2 \cdot \frac{L_\Delta(1)}{L_\Delta(3)} = 2{,}3444283646\ldots = \frac{1620}{691}.$$

Bei der Untersuchung der Relationen, die kritische L-Werte erfüllen, spielen Erzeugendenfunktionen eine wichtige Rolle. Aus den zu untersuchenden Werten einer L-Funktion wird ihrerseits eine Funktion, Periodenpolynom genannt, gebildet, die unter Vernachlässigung von gewissen Faktoren, wie folgt geschrieben werden kann:

$$L(1) + \pi \cdot L(2) \cdot z + \pi^2 \cdot L(3) \cdot z^2 + \cdots + \pi^{k-2} \cdot L(k - 1) \cdot z^{k-2}.$$

Wenn z selber als komplexe Variable aufgefasst wird, so ermöglicht diese Beschreibung die Untersuchung der kritischen L-Werte. Aus den Symmetrien, die diese Funktion erfüllt, lassen sich die oben genannten Relationen zwischen den kritischen L-Werten herleiten. So ist sie zum Beispiel auf eine näher bestimmbare Weise invariant, wenn z durch $-1/z$ ersetzt wird. Die Betrachtung der Gleichheiten, die L-Werte erfüllen, wird also vollständig ersetzt durch Überlegungen zu Symmetrien von Erzeugendenfunktionen.

Auch für das obige Beispiel $L_\Delta(s)$ lässt sich diese Erzeugendenfunktion berechnen. Dabei treten Perioden, ω_+ und ω_-, auf, die nicht als Brüche dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} &\frac{192}{691} \cdot \omega_+ + \frac{384}{5} \cdot \omega_- \cdot z + \frac{16}{135} \cdot \omega_+ \cdot z^2 + 40 \cdot \omega_- \cdot z^3 + \\ &\qquad + \frac{8}{105} \cdot \omega_+ \cdot z^4 + 32 \cdot \omega_- \cdot z^5 + \frac{8}{105} \cdot \omega_+ \cdot z^6 + 40 \cdot \omega_- \cdot z^7 + \\ &\qquad\qquad + \frac{16}{135} \cdot \omega_+ \cdot z^8 + \frac{384}{5} \cdot \omega_- \cdot z^9 + \frac{192}{691} \cdot \omega_+ \cdot z^{10}. \end{aligned}$$

Hieraus wird aber die angesprochene Symmetrie in diesem speziellen Fall offensichtlich. So stimmt der erste mit dem letzten Koeffizienten überein, der zweite mit dem vorletzten, und dieses Muster setzt sich fort.

3. Nichtkritische L-Werte

Während einige Resultate über kritische L-Werte bekannt sind, sind nichtkritische L-Werte, $L(k)$, $L(k+1)$, etc., weitestgehend unverstanden geblieben. Eine Entsprechung der Tatsache, dass die kritischen L-Werte durch Multiplikation von $L(1)$ und $L(2)$ mit rationalen Zahlen hervorgehen, kann es nicht geben. Kurz nachdem das angesprochene Resultat für kritische L-Werte bewiesen wurde, konnte gezeigt werden, dass es nicht möglich ist, endlich viele nichtkritische L-Werte so zu wählen, dass alle anderen durch sie dargestellt werden können. Dennoch ist es nun Bringmann (Univ. Köln), Diamantis (MPIM Bonn) und Raum (MPIM Bonn) gelungen, nähere Einsicht in ihr Verhalten zu erlangen. Wie im Fall der kritischen L-Werte ist das Studium einer Art Erzeugendenfunktion der Schlüssel hierzu.

Das Analogon der Erzeugendenfunktion für kritische L-Werte kann jedoch für die nichtkritischen nicht definiert werden. Es findet sich allerdings folgender Ersatz: Die Grenzwerte bei 0 der Ableitungen $f^{(l)}$ einer geeigneten Funktion f, die für komplexe Zahlen $z = x + i \cdot y$ mit $y > 0$ definiert ist, entsprechen den nichtkritischen L-Werten. In Formeln geschrieben erhält man

$$\lim_{z \to 0} f^{(l)}(z) = d_l \cdot L(k+l),$$

wobei d_l das Produkt einer rationalen Zahl und einer Potenz von π ist. Das unmittelbare Analogon einer der Relationen, die Periodenpolynome erfüllen und die aus der anfangs erwähnten Funktionalgleichung folgt, wäre

$$f(z) + z^{-k} f(-1/z) = 0,$$

doch diese Gleichheit ist nicht erfüllt. Stattdessen lässt sich zeigen, dass die linke Seite gleich einer rationalen Funktion ist, die aus den kritischen L-Werten berechnet werden kann. Dies ist ein unerwarteter und subtiler Zusammenhang zwischen kritischen L-Werten und nichtkritischen L-Werten, genauso wie zwischen den nichtkritischen L-Werten untereinander. Darüber hinaus ähnelt die hinzuzufügende Korrektur denen, die für die von Zagier im Jahrbuch 2008 beschriebenen *Mock-Modulformen* verwendet werden. Und tatsächlich lässt sich ein konkreter Zusammenhang herstellen.

Beide Konzepte, das der Erzeugendenfunktionen für L-Werte und das der Mock-Modulformen, finden im Begriff der *sesquiharmonischen Modulformen* zusammen. Dies sind Modulformen ähnlich zu denen, die von Zagier beschrieben wurden, die allerdings erst nach dreimaliger Anwendung einer Transformation ξ verschwinden. Für eine Funktion g ist $\big(\xi\, g\big)(z)$ als $2 \cdot i \cdot y^k \cdot \big(\overline{\partial_{\overline{z}}\, g}\big)(z)$ definiert. Hierbei tritt die anti-holomorphe Ableitung $\partial_{\overline{z}}$ und die komplexe Konjugation, die als Überstrich $^{-}$ geschrieben wird, auf. Eine sesquiharmonische Modulform g erfüllt $\xi\xi\xi\, g = 0$, während eine holomorphe Modulform g schon $\xi\, g = 0$ erfüllt.

Eine sesquiharmonische Modulform g besitzt einen harmonischen Anteil $\tilde{g}$, ein Begriff, der hier nicht weiter erläutert werden soll. Dieser bildet eine Brücke zwischen Mock-Modulformen und nichtkritischen L-Werten: $\xi\, \tilde{g}$ ist eine Mock-Modulform und

$$\tilde{g}(z) - z^{-k} \cdot \tilde{g}(-1/z) = f(z) + \tilde{f}(z),$$

wobei f die oben beschriebene Funktion, die in Verbindung mit nichtkritischen L-Werten steht, ist und $\tilde{f}$ ein Polynom ist, welches aus den endlich vielen kritischen L-Werten bestimmt werden kann.

Zusammenfassend stellt man fest, dass das Prinzip der *modularen Korrekturen*, das auch in Zagiers Beschreibung der Mock-Modulformen im Jahrbuch 2008 auftrat, sich auf die nichtkritischen L-Werte ausdehnt – eine unerwartete und überraschende Erkenntnis. Nachdem dieser Zusammenhang aber aufgedeckt ist, lässt sich mit Berechtigung hoffen, dass in den nächsten Jahren die tiefer liegenden Geheimnisse der nichtkritischen L-Werte ans Licht gebracht werden können.