Die Langlands-Korrespondenz und p-adische Geometrie

David Hansen

Zusammenfassung: Die Langlands-Korrespondenz stellt einen Zusammenhang her zwischen gewissen Teilen der Algebra und gewissen Teilen der Analysis. Dieser Zusammenhang ist eng und momentan immer noch mehr Vermutung als Theorem. In den letzten Jahren jedoch gab es aufsehenerregende Fortschritte, basierend auf neuen Methoden aus der p-adischen Geometrie. Dieser Bericht gibt eine impressionistische Einführung in die Langlands-Korrespondenz und deutet die Ideen an, die den neuen Entwicklungen zugrunde liegen.

Abstract: The Langlands correspondence predicts a profound connection between algebra and analysis. This connection is deep and still largely conjectural. However, in recent years there has been exciting new progress towards its resolution, thanks to the introduction of striking new geometric techniques. In this report, I give an impressionistic introduction to the Langlands correspondence, and indicate the ideas behind these recent developments.

Die Symmetrien einer Polynomgleichung

Das Studium von Polynomgleichungen gehört zu den ältesten und faszinierendsten Teilgebieten der Mathematik und wurde in geometrischer Form schon von den alten Griechen betrieben. Jedes Schulkind lernt, dass $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$ die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ sind. Doch schon das Lösen von allgemeinen Polynomgleichungen dritten oder vierten Grades ist eine interessante Aufgabe, die erst im 16. Jahrhundert von italienischen Algebraikern bewältigt wurde.

Bei Polynomen vom Grad fünf oder größer tritt etwas Unerwartetes auf: Während man für manche Polynomgleichung die Lösungen mittels den üblichen algebraischen Operationen (inklusive dem Ziehen von Wurzeln) aus den Koeffizienten des Polynoms berechnen kann, ist dies im Allgemeinen nicht möglich. So ist $x = 2^{3/5} - 2^{4/5} - 2^{6/5} - 2^{7/5}$ eine Lösung der Gleichung

$$x^5 - 100x^2 - 1000 = 0, \tag{1}$$

dagegen hat die leicht abgeänderte Gleichung

$$x^5 - 100x^2 - 1001 = 0 \tag{2}$$

keine Lösung, die man mittels den üblichen algebraischen Operationen schreiben kann.

In der modernen Mathematik liefert die Galois-Theorie eine Erklärung für dieses Phänomen: sie ordnet jedem Polynom seine Symmetrie-Gruppe zu, seine sogenannte *Galois-Gruppe*, und die Struktur dieser Gruppe bestimmt die Eigenschaften der Lösungen. So gibt es zum Beispiel im Fall eines quadratischen Polynoms nur eine (nichttriviale) Symmetrie, und diese wechselt in der Lösungsformel das Vorzeichen "$\pm$". Eine Betrachtung ihrer Galois-Gruppen zeigt auch, wieviel einfacher die Gleichung (1) im Vergleich zu der Gleichung (2) ist: während sich die Galois-Gruppe der ersten Gleichung aus 20 Elementen zusammensetzt, besitzt die Galois-Gruppe der zweiten Gleichung 120 Elemente (was auch das maximal mögliche für eine Gleichung 5. Grades ist).

Die Idee der Langlands-Korrespondenz

Die *Langlands-Korrespondenz* ist eine der kühnsten Ideen der Mathematik in den letzten hundert Jahren. Stark vereinfacht besagt sie, dass sich die Struktur von Polynomgleichungen und ihrer Lösungen – welche diskreter, algebraischer Natur ist – an gewissen analytischen Funktionen, die eine hohe Symmetrie besitzen, ablesen lässt.

Anstatt die allgemeine Philosophie näher zu erläutern, werde ich ein Beispiel geben. Für komplexe Zahlen $z = x + iy$ mit positivem Imaginärteil $y > 0$ betrachten wir die Funktion

$$f(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{23n}), \quad q = e^{2\pi i z}.$$

Für die betrachteten Werte von z macht das unendliche Produkt Sinn und die Formel definiert eine *analytische Funktion*, also eine Funktion, die komplex differenzierbar ist. Diese Funktion besitzt nun einerseits sehr viele Symmetrien: für beliebige ganze Zahlen a, b, c, d mit $ad - bc = 1$, sowie c und $d - 1$ teilbar durch 23, gilt $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz + d)f(z)$. Zum Beispiel gilt $f(\frac{z}{23z+1}) = (23z + 1)f(z)$, neben unendlich vielen weiteren Identitäten ähnlicher Art.

Auf der anderen Seite erhalten wir durch formales Ausmultiplizieren eine Reihenentwicklung in Potenzen von q

$$f = q - q^2 - q^3 + q^6 + q^8 - q^{13} - q^{16} + q^{23} - q^{24} + q^{25} + \cdots .$$

Für eine Primzahl p sei a_p der Koeffizient von q^p in dieser Reihe, also $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_5 = 0$, und so weiter. Dann ist die Folge der Zahlen a_p eng verbunden mit der Arithmetik des Polynoms $g(x) = x^3 - x - 1$. So ist $a_p = -1$ für genau (!) die Primzahlen, die die Werte von $g(x)$ an ganzen Zahlen x nicht teilen. Zum Beispiel ist $g(0) = g(1) = g(-1) = -1$ nicht durch 3 teilbar, und wegen Kongruenzrechnung dann auch kein anderer Wert $g(x)$ für eine ganze Zahl x, was $a_3 = -1$ entspricht. Dagegen lässt $a_5 = 0$ erwarten, dass für ein geeignetes ganzzahliges Argument $g(x)$ durch 5 teilbar ist, und tatsächlich ist $g(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$ durch 5 teilbar.

Dieses Beispiel ist alt und war schon Erich Hecke in den 1930er Jahren in der einen oder anderen Form bekannt. Aber es ist nur die Spitze eines riesigen Eisbergs, in dem die Funktion $f(z)$ durch eine allgemeinere *automorphe Form* und das Polynom $g(x)$ durch allgemeinere Polynomgleichungen ersetzt wird. In dieser Allgemeinheit ist die Langlands-Korrespondenz nach wie vor ein im Wesentlichen offenes Problem, trotz der großen Fortschritte, die in den letzten 60 Jahren erzielt wurden.

Neue Ideen aus der p-adischen Geometrie

Ein wesentlicher Grund für die Schwierigkeit, die Langlands-Korrespondenz zu beweisen, liegt darin begründet, dass sie versucht, zwischen zwei sehr verschiedenen Arten von mathematischen Strukturen eine Verbindung herzustellen: zwischen *diskret-algebraischen* Strukturen auf der einen Seite und *stetig-analytischen* Strukturen auf der anderen Seite. Welche Methoden sind nun in der Lage, zwischen so verschiedenen Gebieten eine Verbindung aufzuzeigen? Es ist eine der wichtigsten Erkenntnisse der letzten 30 Jahre, dass die *p-adische Geometrie* hier einen wichtigen Beitrag liefern kann, und gerade in jüngster Zeit führte sie zu großen Fortschritten bei der Langlands-Korrespondenz.

Um die Grundidee der p-adischen Analysis zu verstehen, erinnern wir daran, dass in der üblichen Analysis eine Funktion *stetig* genannt wird, wenn sie nahegelegene Zahlen auf nahegelegene Zahlen abbildet, wobei *nahegelegen* seine übliche intuitive Bedeutung hat: zwei Zahlen liegen nahe beieinander, wenn sie auf der Zahlengeraden $\mathbf{R}$ nahe beieinander sind. In der p-adischen Analysis dagegen misst man den Abstand ganz anders: man sagt, zwei rationale Zahlen x und y liegen p-adisch nahe beieinander, wenn ihre Differenz $x - y$, geschrieben als gekürzter Bruch $\frac{a}{b}$, die Eigenschaft hat, dass der Zähler a durch eine hohe Potenz von p teilbar ist. So sind zum Beispiel die Zahlen 17 und 360 7-adisch nahe beieinander, weil $360 - 17 = 343 = 7^3$ ist.

Obgleich dieser Abstandsbegriff viel weniger intuitiv ist, so kann man doch in diesem Rahmen wieder die vertrauten Begriffe aus der Analysis und der Geometrie entwickeln. Insbesondere gibt es auch eine *p-adische Zahlengerade* $\mathbf{Q}_p$, die als Modell dient für eine p-adische Geometrie. Diese Theorie ist zwar ihrer Natur nach analytisch, hat jedoch einen viel engeren Bezug zu den algebraischen Strukturen, die in der Langlands-Korrespondenz betrachtet werden, als die übliche reelle Analysis. So kann sie als Brücke dienen zwischen den zwei sehr unterschiedlichen Strukturen, die die Langlands-Korrespondenz verknüpft.

Die Idee, eine p-adische Geometrie zu entwickeln, ist nicht neu: Kurt Hensel führte in den 1890er Jahren die p-adischen Zahlen ein, und die p-adische Geometrie hat sich nach grundlegenden Arbeiten von John Tate in den 1960er Jahren zu einem florierenden Zweig der Mathematik entwickelt. In den letzten 10 Jahren erfuhr die Theorie jedoch eine vollständige Neuentwicklung ihrer Grundlagen, verbunden mit einer Phase enormen Wachstums, die bis heute anhält. Maßgeblich dazu beigetragen haben Arbeiten von Peter Scholze (MPI für Mathematik), teilweise in Mehrautorenschaft, für die er 2018 mit der Fields Medaille ausgezeichnet wurde. Anfang 2021 erreichte diese Entwicklung einen weiteren Höhepunkt in einer 350 Seiten starken Vorveröffentlichung von Laurent Fargues zusammen mit Peter Scholze, dessen Hauptergebnis (wage ausgedrückt) der Beweis einer geometrischen Version der Langlands-Korrespondenz für Polynomgleichungen mit p-adischen Koeffizienten ist [1]. Eine solche Entwicklung war 10 Jahre zuvor nicht denkbar!

Die Arbeit [1] ist ein Feuerwerk an neuen Ideen und Techniken, und viele auf diesem Gebiet arbeitenden Mathematiker sind momentan bemüht, diese Ideen aufzugreifen und auf andere, bisher als schwer lösbar geltende Probleme anzuwenden. So ist es Tasho Kaletha, Jared Weinstein und mir in einer gemeinsamen Arbeit [2] gelungen, aufbauend auf diesen Ideen, eine 25 Jahre alte Vermutung von Robert Kottwitz zu beweisen. Vereinfacht ausgedrückt besagt diese Vermutung, dass die in [1] konstruierte Langlands-Korrespondenz auch in der (mathematischen) Natur gefunden werden kann, und dass sie kompatibel mit schon bekannten Spezialfällen der Langlands-Korrespondenz ist. Weitere aufsehenerregende Anwendungen sind zu erwarten. Es sind momentan spannende Zeiten für Mathematiker, die auf diesem Gebiet arbeiten!

Literatur

[1] Fargues, L., Scholze, P., *Geometrization of the local Langlands correspondence*, Preprint, verfügbar unter https://arxiv.org/abs/2102.13459, 2021.

[2] Hansen, D., Kaletha, T., Weinstein, J., *On the Kottwitz conjecture for local shtuka spaces*, Preprint, verfügbar unter https://arxiv.org/abs/1709.06651, 2021.