Flächen in 4-dimensionalen Räumen

Arunima Ray

Zusammenfassung: Die Topologie ist das Studium von Räumen. Die einfachsten Räume, die sogenannten *Mannigfaltigkeiten*, gleichen lokal den euklidischen Räumen. Überraschenderweise verhalten sich Mannigfaltigkeiten der Dimensionen fünf und größer ähnlich zueinander, wohingegen niedrigdimensionale Räume schwerer zu kontrollieren sind. Eine bahnbrechende Arbeit von Freedman über 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten brachte 1982 viel Licht ins Dunkel. Leider ist diese Arbeit nur schwer zugänglich und wird von der mathematischen Gemeinschaft nicht ausreichend gut verstanden. Neue Arbeiten geben eine zugänglichere Darstellung der Ideen Freedmans, verallgemeinern sie und führen sie weiter fort.

Abstract: Topology is the study of spaces of arbitrary dimensions and their properties. The simplest spaces, called *manifolds*, locally resemble Euclidean spaces, such as the infinite line, or the infinite plane. Curiously, manifolds of dimension at least five behave similarly to one another, while lower dimensional spaces are less controlled. Seminal work of Freedman from 1982 shed light on 4-dimensional manifolds. Unfortunately this is not well-understood by the mathematical community. Recent work provides an accessible exposition of these beautiful ideas as well as extensions and generalizations.

Der euklidische Raum als Modell

Die Topologie beschäftigt sich mit den qualitativen Eigenschaften von Räumen, man könnte sagen, sie beschäftigt sich mit ihrer *Gestalt*. Dieser Begriff der Gestalt findet auch Anwendungen außerhalb der Mathematik, wie z. B. bei der Konfiguration von DNA und Proteinen, in der Chaostheorie, der Ökonometrie und in der Kosmologie.

Die am meist vertrauten Räume sind die euklidischen, wie die 1-dimensionale reelle Gerade, die 2-dimensionale unendliche Ebene oder der 3-dimensionale Raum mit seinen x-, y- und z-Koordinaten. Räume, die im Kleinen wie euklidische Räume geformt sind, heißen *Mannigfaltigkeiten*. So ist z. B. die 2-dimensionale Sphäre eine Mannigfaltigkeit, da jeder Punkt auf ihr eine Umgebung besitzt, die wie die Ebene aussieht (siehe **Abbildung 1**). Ebenso ist der Torus eine 2-dimensionale und die Kreislinie eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Das Universum, in dem wir leben, scheint eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit zu sein, ebenso wie die Raum-Zeit eine 4-dimensionale.

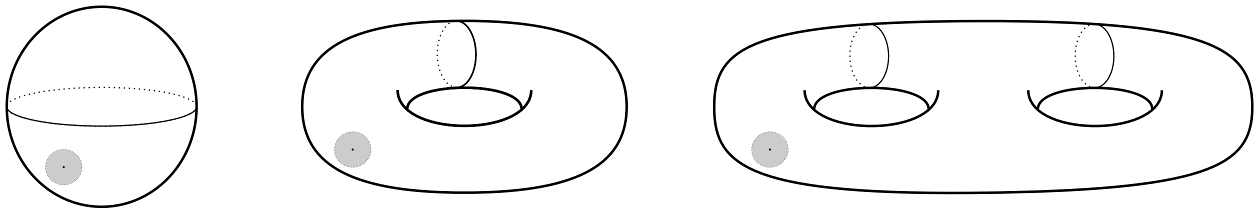

Abbildung 1: Die Sphäre, der Torus und der Torus mit zwei Löchern sind 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten, da jeder Punkt auf ihnen eine der Ebene ähnliche Umgebung (grau) besitzt. © MPI für Mathematik, A. Ray

Bahnbrechende Arbeiten von Robion Kirby und Laurence Siebenmann aus den 1970er Jahren, zusammen mit den unter dem Namen *Chirurgie* zusammengefassten Methoden des kontrollierten Zerschneidens und Zusammenklebens von Mannigfaltigkeiten, haben das Studium von 5- und höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten stark vereinfacht. Auch konnten wichtige Probleme wie die berühmte Poincaré-Vermutung, nach der man Sphären von anderen Mannigfaltigkeiten anhand weniger Invarianten unterscheiden kann, in diesen Dimensionen gelöst werden. Der Erfolg dieser Arbeiten beruht ganz wesentlich darauf, dass Abbildungen von Flächen (also zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten) in 5- oder höherdimensionale Räume nach kleinen Störungen zu *Einbettungen*, also frei von Selbstüberschneidungen, werden, was in kleineren Dimensionen nicht mehr zutrifft (siehe in **Abbildung 2** die analoge Situation der Abbildung einer Kurve in die Ebene bzw. in den dreidimensionalen Raum). Solche Einbettungen spielen eine große Rolle beim Anwenden chirurgischer Methoden.

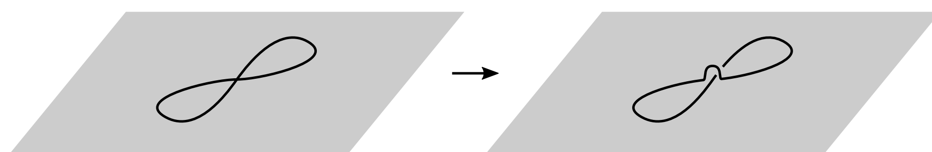

Abbildung 2: Eine ebene Kurve mit Selbstüberschneidung und die Auflösung derselben durch ein Ausweichen in die dritte Dimension. © MPI für Mathematik, A. Ray

Vier Dimensionen

Entgegen dem, was man vielleicht erwarten würde, ließen in kleinen Dimensionen die Fortschritte lange auf sich warten. Hierbei zeigt sich die „Dimension vier“ als ein Grenzfall zwischen niedrig- und hochdimensionaler Topologie – es gibt einerseits genügend Dimensionen, um ein komplexes Verhalten zu zeigen, andererseits sind es nicht ausreichend viele Dimensionen, um die üblichen Methoden anzuwenden.

Obwohl Mannigfaltigkeiten lokal wie euklidische Räume aussehen, kann man im Allgemeinen auf ihnen global keine Differentialrechnung betreiben. Tatsächlich muss man sie dazu mit einer zusätzlichen Struktur versehen, was nicht immer möglich ist, und man spricht dann von einer *glatten* Mannigfaltigkeit. Ein Beispiel für die Besonderheit der Dimension vier ist die Diskrepanz zwischen topologischen und glatten Strukturen: Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 und kleiner besitzen genau eine glatte Struktur; Mannigfaltigkeiten der Dimension 5 und größer besitzen höchstens endlich viele glatte Strukturen; 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten hingegen können unendlich viele glatte Strukturen besitzen.

In den 1980er Jahren wurde das Verständnis von 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch Arbeiten von Michael Freedman [1] und Simon Donaldson [2] revolutioniert, für die beide jeweils die Fields-Medaille erhielten. Einfach gesprochen zeigte Freedman, dass sich viele 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten topologisch wie hochdimensionale Mannigfaltigkeiten verhalten, Donaldson dagegen bewies, dass dies bezüglich der glatten Struktur nicht gilt. So zeigte Freedman, wie sich Abbildungen von Kreisscheiben in gewisse 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten topologisch in Einbettungen verwandeln lassen, und Donaldson zeigte, dass dies auf glatte Weise nicht geschehen kann.

Die eingebettete Kreisscheibe konstruiert Freedman als das Endprodukt eines unendlich oft iterierten Prozesses, bei dem in jedem Schritt Einbettungshindernisse niedriger Ordung auf Kosten von zusätzlichen Hindernissen höherer Ordnung eliminiert werden. Auf wunderbare Weise erhält man im Limes eine Abbildung, für die alle Hindernisse verschwunden sind und die daher eine Einbettung ist.

In den darauffolgenden Jahren gab es umfangreiche Aktivitäten mit dem Ziel, die Ergebnisse von Donaldson und Freedman zu verallgemeinern. Mit Hinblick auf Freedmans Arbeit kulminierte dies in einem Buch von Freedman and Frank Quinn [3], das die Techniken darlegte. Danach aber haben nur noch wenige Forscher über die rein topologischen Eigenschaften von 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten gearbeitet. Dahingegen ist Donaldsons Arbeit fortwährend Gegenstand intensiver Forschung gewesen.

Neu aufkomendes Interesse und neue Resultate

In den 1980er Jahren lernten Mathematiker die Einzelheiten des Beweises Freedmans in Seminaren und in Diskussionen. Aber nur wenig davon wurde aufgeschrieben, und die existierenden Quellen sind schwer verständlich. Heutzutage benutzen die meisten Mathematiker Freedmans Ergebnisse, ohne die Beweise zu kennen, und in manchen Kreisen wurden auch schon Zweifel an der Richtigkeit des Beweises geäußert.

Als Replik darauf organisierten Matthias Kreck und Peter Teichner (MPI für Mathematik) 2013 eine Vortragsreihe an der University of California, Santa Barbara, live übertragen ans MPI für Mathematik nach Bonn, in der Freedman seinen Beweis 30 Jahre nach Entdeckung nochmal darlegte. Auf dieser Grundlage hat eine Gruppe bestehend aus 20 Forschern eine ausführliche Beschreibung von Freedmans Werk erstellt. Die Mitglieder der Gruppe sind über die ganze Welt verteilt und werden von fünf Editoren angeleitet: Stefan Behrens (ehemals Doktorand am MPIM), Boldizsár Kalmár, Min Hoon Kim, Mark Powell (MPIM) und mir. Das Ergebnis ist ein Buch, das von Oxford University Press zur Publikation angenommen wurde.

Im Laufe dieses Buchprojekts wurden viele Details des Beweises zum ersten Mal schriftlich ausgeführt, und eine Lücke im Beweis eines Schlüsselresultats im Buch von Freedman und Quinn gefunden. Diese Lücke konnte in einer gemeinsamen Arbeit von Powell, Teichner und mir [4] geschlossen werden.

Das Ziel des Projektes ist es, Freedmans Ideen zu 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten einem breiteren Publikum zugänglich zu machen, in der Hoffnung, dass dies zu weiteren Resultaten und zum Lösen noch offener Probleme führt. Ein erster Schritt in diese Richtung ist ein laufendes Projekt von Daniel Kasprowski, Powell, Teichner und mir, in dem wir präzise Bedingungen angeben, unter denen die Abbildung einer allgemeinen Fläche wie ein Torus oder ein Möbiusband in eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit in eine Einbettung abgeändert werden kann. Der Beweis erfordert neben einer sorgfältigen Analyse der Invarianten, die Freedman in seinem Beweis eingeführt hat, auch die Einführung und das Studium neuer Invarianten. Eine andere Arbeit in diese Richtung behandelt die Einbettbarkeit von Sphären in gewisse 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die von Peter Feller, Allison Miller, Matthias Nagel, Patrick Orson, Powell und mir [5] mit Methoden der Chirurgie angegangen werden.

Literatur

[1] Michael H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, Journal of Differential Geometry **17** (1982), no. 3, 357–453. MR 679066

[2] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, Journal of Differential Geometry **18** (1983), no. 2, 279–315. MR 710056

[3] Michael H. Freedman and Frank Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton Mathematical Series, vol. 39, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990. MR 1201584

[4] Mark Powell, Arunima Ray, and Peter Teichner, *The 4-dimensional disc embedding theorem and dual spheres*, Preprint, verfügbar unter https://arxiv.org/abs/2006.05209, 2020.

[5] Peter Feller, Allison N. Miller, Matthias Nagel, Patrick Orson, Mark Powell, and Arunima Ray, *Embedding spheres in knot traces*, Preprint, verfügbar unter https://arxiv.org/abs/2004.04204, 2020.