Symmetrie-Gruppoide in der klassischen Feldtheorie

Christian Blohmann

Zusammenfassung: Die Korrespondenz zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen ist eines der wichtigsten Prinzipien der Physik. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik und zu Eichfeldtheorien spannen die Erhaltungsgrößen der Allgemeinen Relativitätstheorie keine Symmetrie-Algebra im herkömmlichen Sinn auf. Stattdessen erhält man ein sogenanntes Hamilton'sches Lie-Algebroid von einem auf natürliche Weise konstruierten Symmetrie-Gruppoid.

Abstract: The correspondence between symmetries and conserved quantities is one of the most important principles of physics. In contrast to classical mechanics and gauge field theories, the conserved quantities of General Relativity do not span a symmetry algebra in the conventional sense. Instead, a so-called Hamiltonian Lie algebroid is obtained from a naturally constructed symmetry groupoid.

Hamilton'sche Gruppenwirkungen

Eines der wichtigsten Prinzipien der Physik ist der Zusammenhang zwischen Symmetrien wie Zeitverschiebungen, Drehungen und Eichtransformationen auf der einen Seite und Erhaltungsgrößen wie Energie, Drehimpuls und Ladung auf der anderen Seite. In der klassischen Mechanik ist eine Symmetrie eine Transformation des Phasenraums M, die das Wirkungsfunktional invariant lässt. Die Identität von M ist trivialerweise eine Symmetrie; führt man zwei Symmetrien hintereinander aus, so erhält man wieder eine Symmetrie; Symmetrien können invertiert, also rückgängig gemacht werden. Symmetrien bilden also eine Gruppe G.

Viele Symmetrie-Gruppen der Physik wie Raumzeit-Symmetrien und Eichsymmetrien sind sogenannte Lie-Gruppen, d.h. die Gruppenelemente sind durch reelle Parameter bestimmt, nach denen die Symmetrie-Transformationen abgeleitet werden können. Die Drehungen der Ebene beispielsweise sind durch den Drehwinkel α bestimmt. Für ein Punktteilchen in der Ebene mit Ort und Impuls (q_1, q_2, p_1, p_2) ist der Phasenraum $M = \mathbb{R}^4$. Leitet man die Drehung der Orts- und Impulskoordinaten nach α ab, so erhält man ein Vektorfeld auf M, dessen Richtungsableitung auf differenzierbare Funktionen als Differentialoperator

$$X_\mu = \frac{\partial \mu}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial \mu}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial \mu}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial \mu}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial p_2}$$

wirkt, wobei die Funktion $\mu = q_1 p_2 - q_2 p_1$ der Drehimpuls des Teilchens ist (Abbildung 1). Ein Vektorfeld dieser Form heißt das von μ erzeugte *Hamilton'sche Vektorfeld*.

Die Lie-Gruppe G wirkt durch Multiplikation auch auf sich selbst. Die Vektorfelder dieser Gruppenwirkung bilden einen Vektorraum $\mathfrak{g}$, der unter dem Kommutator $[v, w] = vw - wv$ von Differentialoperatoren abgeschlossen ist und damit eine sogenannte

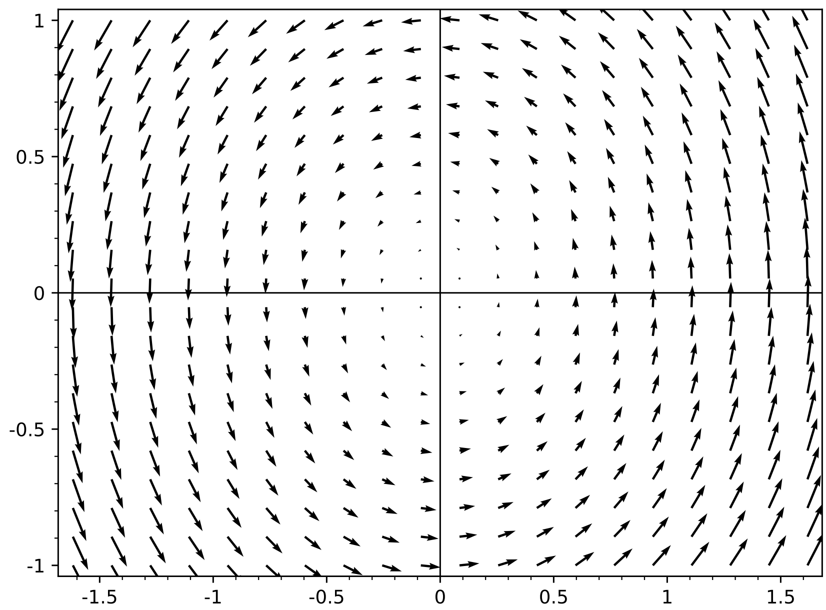

Abbildung 1: Das Vektorfeld $X = -q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}$ der Drehungen in der (q_1, q_2)-Ebene. © MPI für Mathematik, C. Blohmann

Lie-Algebra bildet. Wirkt G durch Hamilton'sche Vektorfelder, so erhalten wir die sogenannte Impuls-Abbildung $\mu : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, die den Elementen der Lie-Algebra die zugehörigen erzeugenden Funktionen der Vektorfelder auf M zuordnet. Die differenzierbaren Funktionen $C^\infty(M)$ auf dem Phasenraum bilden ebenfalls eine Lie-Algebra mit der Poisson-Klammer, die von den bei der Herleitung der Bewegungsgleichung zunächst ignorierten Randtermen herrührt. In den meisten Fällen ist μ ein Homomorphismus von Lie-Algebren. Symmetrien mit einer solchen Impuls-Abbildung heißen *Hamilton'sche Gruppenwirkungen*. Sie spielen eine grundlegende Rolle in vielen Gebieten der Mathematik, wie etwa der symplektischen Geometrie, integrablen Systemen, torischen Varietäten und äquivarianter Kohomologie [1].

Symmetrien in der Feldtheorie

In der klassischen Feldtheorie wurde der mathematische Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen von Emmy Noether 1918 in großer Allgemeinheit für lokale Feldtheorien gezeigt: Jeder lokalen Symmetrie-Transformation der Menge aller Felder $\mathcal{F}$ kann ein erhaltener Strom zugeordnet werden. Beispielsweise liefert das Noether-Theorem für die U(1)-Eichsymmetrie der Maxwell-Theorie den elektromagnetischen 4er-Strom, der aus Ladungsdichte und elektrischer Stromdichte besteht.

Mathematisch ist ein Noether-Strom eine Abbildung $j : \mathcal{F} \to \Omega^{n-1}(M)$, die jedem Feld eine Differentialform auf der Raumzeit M der Dimension n zuordnet. Durch Integration von $j(\phi)$ über eine geschlossene Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ der Dimension $n-1$ erhält man die zugehörige Ladung auf S, eine Funktion $q_S : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Ist die Raumzeit als Produkt $M \cong S \times \mathbb{R}$ in Raum- und Zeitrichtung aufgespalten, dann hängt die Ladung eines erhaltenen Stromes auf $S \times \{t\}$ für Lösungen der Feldgleichungen nicht von der Zeit t ab, ist also eine Erhaltungsgröße.

Wie die Erhaltungsgrößen der klassischen Mechanik sind auch die Noether-Ladungen die erzeugenden Funktionen der infinitesimalen Symmetrien. Ist die Abbildung, die einem Element der Symmetrie-Lie-Algebra die zugehörige Noether-Ladung zuordnet, ein Homomorphismus von Lie-Algebren? Für Yang-Mills-Eichtheorien ist dies der Fall. Die Noether-„Ladungen“ der Allgemeinen Relativitätstheorie jedoch sind die Integrale der schon Gauß bekannten Gauß-Codazzi-Funktionen, die nicht unter der Poisson-Klammer geschlossen sind und daher nicht die Bilder eines Homomorphismus von Lie-Algebren sein können. Dennoch haben die Gauß-Codazzi-Funktionen einige der guten Eigenschaften, die für die Impuls-Abbildung einer Hamilton'schen Wirkung charakteristisch sind. Mit der Erklärung dieses Phänomens haben sich seit den 1970er Jahren zahlreiche Arbeiten in der Physik [2] und der Mathematik [3] beschäftigt.

Lie-Gruppoid-Symmetrien

Der entscheidende Unterschied zwischen Eichtheorien und der Allgemeinen Relativitätstheorie ist, dass die Symmetrien der ART auf die Raumzeit und nicht nur auf die inneren Freiheitsgrade der Felder wirken. Die Wahl der Untermannigfaltigkeit $S \subset M$, über die der Noether-Strom integriert werden muss, um die Noether-Ladung zu erhalten, ist deshalb nicht mit allen Symmetrien verträglich. Wir konnten zeigen, dass die Symmetrie-Gruppe durch ein Symmetrie-*Gruppoid* ersetzt werden kann, das auch die möglichen Wahlen der Untermannigfaltigkeit S in der Raumzeit M beschreibt [4]. Die Klammern des zugehörigen Lie-*Algebroids* sind durch die Poisson-Klammern der Gauß-Codazzi-Funktionen gegeben. Weiterhin konnten wir Hamilton'schen Wirkungen von Lie-Gruppen und Lie-Algebren zum Konzept von Hamilton'schen Lie-Gruppoiden und Lie-Algebroiden verallgemeinern [5]. Die Gauß-Codazzi-Funktionen können damit als Komponenten einer Impuls-Abbildung des Hamilton'schen Lie-Algebroids interpretiert werden. Dies führt zu einer strukturellen Erklärung der Eigenschaften der Noether-Ladungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, aber auch anderer lokaler Feldtheorien mit Raumzeit-Symmetrien. Mit dem Lie-Gruppoid ist außerdem die grundlegende Symmetrie-Struktur identifiziert, die mit Quantisierungsverfahren verträglich sein sollte. Insgesamt erhält man also durch die Verwendung von Lie-Gruppoiden und Lie-Algebroiden eine mathematisch befriedigende Erklärung eines alten Rätsels der Allgemeinen Relativitätstheorie. Darüber hinaus ermöglicht es der Zugang über Lie-Gruppoide, die Allgemeine Relativitätstheorie und weitere Feldtheorien mit neueren mathematischen Methoden wie differenzierbaren Stacks, höheren Kategorien und Faktorisierungs-Homologie zu studieren.

Literatur

[1] Atiyah, M. F.; Bott, R.
The moment map and equivariant cohomology
Topology, 23(1), 1–28 (1984)
DOI: 10.1016/0040-9383(84)90021-1

[2] Teitelboim, C.
How commutators of constraints reflect the space-time structure
Annals Phys., 79, 542–557 (1973)
DOI: 10.1016/0003-4916(73)90096-1

[3] Fischer, A. E.; Marsden, J. E.
The Einstein equations of evolution—a geometric approach

J. Mathematical Phys., 13, 546–568 (1972)
DOI: 10.1063/1.1666014

[4] Blohmann, C.; Barbosa Fernandes, M. C.; Weinstein, A.
Groupoid symmetry and constraints in general relativity
Commun. Contemp. Math., 15(1), 1250061, 25 pp. (2013)
DOI: 10.1142/S0219199712500617

[5] Blohmann, C.; Weinstein, A.
Hamiltonian Lie algebroids
arXiv:1811.11109, 88 pages