Das Zählen von Flächen

Die Betrachtung physikalischer Theorien liefert Informationen über die Geometrie des sie umgebenden Raums. So führten Quantenfeldtheorien und Stringtheorien zur Definition neuer, schwer berechenbarer geometrischer Invarianten. Diese werden von algebraischen Strukturen beherrscht, die, aus bisher nicht vollständig verstandenen Gründen, in der enumerativen Geometrie von Flächen weite Anwendung finden. Dieser Bericht beschreibt die Prinzipien einer dieser Strukturen, der sogenannten topologischen Rekursion, die auf der Zerlegung von Flächen in hosenförmige Teile beruht.

Imagining physical theories taking place in a space M allow mathematicians to extract fine geometric information on M. In particular, quantum field theories and string theories have led to the definition of new and hard-to-compute geometric invariants. The algebraic structures that govern them have in fact a wider range of applications for the enumerative geometry of surfaces, for reasons that are not completely understood yet. This report describes the principle of one these structures, called topological recursion and based on the strategy of cutting surfaces into pairs of pants.

Von der Physik zu geometrischen Invarianten

Die Geometrie eines Raums beeinflusst den Ablauf der physikalischen Vorgänge, die in ihm stattfinden. Dies ist offensichtlich, denkt man z. B. an den Einfluss, den die Länge einer Saite auf die Frequenzen von Grund- und Obertönen hat, oder die Form einer Membrane auf die Längen stehender Wellen. Die berühmte Frage von Marc Kac „Kann man die Form einer Trommel hören?“ zielt darauf ab, in wieweit dieses Spektrum an Wellenlängen die Geometrie des Raums bestimmt. Obgleich die Antwort auf Kacs Frage negativ ausfällt, können doch Flächeninhalt und Durchmesser einer Trommel anhand der Anzahl kleiner Wellenlängen abgeschätzt werden. Dies ist vielleicht die einfachste Manifestierung eines allgemeinen Prinzips, das in den letzten 50 Jahren den Dialog zwischen Physik und Mathematik bestimmt hat:

$\star$ *Die Vorhersagen physikalischer Theorien, betrachtet in einem Raum M, geben interessante (wenn auch nicht vollständige) Informationen über die Geometrie von M.*

Quantenfeldteorien und Stringtheorien sind physikalischen Theorien, die keine streng mathematischen Formulierungen besitzen, und von den Stringtheorien ist momentan noch sehr unklar, inwieweit sie wirklich das Universum beschreiben. Davon unberührt wandten Mathematiker das Prinzip $\star$ auf diese Theorien an und definierten für gewisse Klassen von Räumen neue geometrische Invarianten.

Warum zählt man Flächen ?

Grundlegend für die Stringtheorie ist die Idee, dass sich anstatt eines punktförmigen Teilchens ein elastisches Band, ein „String“, durch M bewegt: es durchläuft eine orientierbare Fläche, die verzweigen kann (wenn der String sich in zwei Strings aufspaltet) oder die sich vereinigen kann (wenn sich zwei Strings treffen). Die Stringtheorie ist eine Quantentheorie, was bedeutet, dass man nicht über die Bewegungsbahn eines einzelnen Strings sprechen kann, sondern stattdessen die physikalisch beobachtbaren Größen (*Observablen*) durch Mittelung über alle möglichen Bewegungsbahnen berechnet (siehe [1]).

Eine abstrakte Fläche S wird (bis auf Deformationen) durch ihre Anzahl g an „Löchern“ und n an „Enden“ bestimmt. Man sagt dann, dass S die *Topologie* (g, n) habe. Die negative Eulerzahl $\chi = 2g - 2 + n$ ist ein Maß für die Komplexität von S. So hat z. B. die Sphäre die Topologie $(0, 0)$ und mit $\chi = -2$ die geringst mögliche Komplexität, dagegen hat die Brezel die Topologie $(3, 0)$ und $\chi = 4$. Die Geometrie von S wird durch eine Metrik (also einem Abstandsmaß auf S) bestimmt. Ist $\chi > 0$, so kann man jede Metrik winkelerhaltend in eine *hyperbolische* Metrik, i.e. eine mit konstanter Krümmung -1, deformieren. Die Menge der hyperbolischen Metriken ist unendlich groß und bildet selber einen Raum $\mathcal{T}_{g,n}$ der Dimension 3χ , den sogenannten *Teichmüllerraum*. Auf $\mathcal{T}_{g,n}$ wirkt eine abzählbare Gruppe von Symmetrien; identifiziert man Punkte, die durch solche Symmetrien ineinander übergeführt werden, erhält man den *Modulraum* $\mathcal{M}_{g,n}$.

In der Stringtheorie berechnet man Observablen als gewisse Summen über die Geometrien auf Flächen einer gegebenen Topologie (g, n). Könnte man dieser Summierung einen streng mathematischen Sinn verleihen, so würde eine Stringtheorie auf M interessante Funktionen auf $\mathcal{M}_{g,n}$ liefern (nämlich Summen über alle Flächen in M mit fester Geometrie, die einem Punkt in $\mathcal{M}_{g,n}$ entsprechen), deren Mittel über $\mathcal{M}_{g,n}$ wiederum interessante geometrische Invarianten von M sein sollten.

In den 1990er-Jahren wandten Mathematiker das Prinzip $\star$ auf die „topologische Stringtheorie“ an und definierten die sogenannten *Gromov-Witten-Invarianten* für *Kählerräume* M. Diese Konstruktionen sind allerdings indirekt und erlauben weder eine Berechnung der Invarianten noch eine Definition der gesuchten Funktionen auf $\mathcal{M}_{g,n}$ selbst. Die Versuche, GW-Invarianten zu berechnen, führten zur Aufdeckung sie dominierender algebraischer Strukturen wie *integrable Hierarchien* von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, *holomorphe Anomaliegleichung* und die *topologische Rekursion*. Tatsächlich sind diese Strukturen in der mathematischen Physik überall präsent, und man würde den Grund dieser Universalität gerne besser verstehen.

Die topologische Rekursion und ihre Anwendungen

Um die Komplexität einer Fläche S mit $\chi > 1$ zu verringern, zerlegt man sie in Teilstücke der Topologie $(0, 3)$, sogenannte *Hosen*, und entfernt ein solches am Rand liegendes Teilstück. Hat S die Topologie (g, n), so führt dies entweder zu einer neuen Fläche der Topologie $(g-1, n+1)$ oder $(g, n-1)$, oder es entstehen zwei neue Flächen der Topologien (h_1, n_1+1) und (h_2, n_2+1) (Abbildung 1). In jedem Fall ist die negative Eulerzahl der neuen Fläche(n) kleiner als χ.

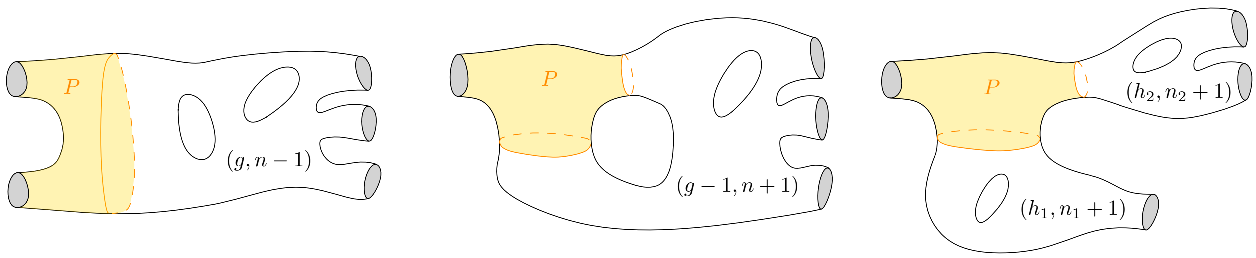

Abbildung 1: Ausschneiden einer am Rand liegenden Hose aus einer Fläche der Topologie (g, n). © MPI für Mathematik, G. Borot

Die *topologische Rekursion* (TR) ist ein abstraktes Rechenschema, das für jede Topologie (g, n) mit $\chi > 0$ gewisse Größen $W_{g,n}$ produziert. Als Input benötigt dieses Rechenverfahren die Größen für $\chi = 1$ (*i.e.* $W_{0,3}$ and $W_{1,1}$) und einen sogenannten *Rekursionsoperator* $\mathcal{O}$. Dann berechnet sich $W_{g,n}$ induktiv über χ als eine Summe über alle Topologien t, die nach Ausschneiden einer am Rand liegenden Hose auftreten können, der Terme $\mathcal{O}[W_t]$. Dabei führt in der Regel ein anderer Input zu anderen Größen.

Ein erstes nichttriviales Beispiel ist eine Vermutung von Edward Witten (IAS Princeton) von 1991, die wenig später von Maxim Kontsevich (damals MPI für Mathematik, jetzt IHES Paris) bewiesen wurde: Sie gibt einen Input an, für den die mittels TR berechneten Größen $W_{g,n}$ die GW-Invarianten eines Punktes sind. In der Folge zeigten sich auch die GW-Invarianten einiger komplizierterer Räume mittels TR berechenbar, wie die von Sphären [2] oder die von sogenannten *torischen Calabi-Yau-3-Mannigfaltigkeiten* [3]. In den meisten Fällen ist dies aber nicht bekannt.

Die TR spielt aber auch eine Rolle bei der Berechnung anderer Größen, wie z. B. die des Weil-Petersson-Volumens von $\mathcal{M}_{g,n}$. Mittels hyperbolischer Geometrie berechnet Maryam Mirzakhani in [4] die konstante Funktion 1 auf $\mathcal{M}_{g,n}$ durch eine verfeinerte TR. Eine Mittelung über $\mathcal{M}_{g,n}$ ergibt dann das Weil-Petersson-Volumen von $\mathcal{M}_{g,n}$. Gaëtan Borot (MPI für Mathematik) et al. verallgemeinern und axiomatisieren in [5] diese verfeinerte TR. Dabei konstruieren sie (induktiv über χ) Funktionen auf $\mathcal{M}_{g,n}$, die Summen sind über die (abzählbar vielen) Homotopieklassen von in S eingebetteten Hosen und deren Mittelungen über $\mathcal{M}_{g,n}$ mittels TR berechenbar sind. Dieser verfeinerte Formalismus führt zu neuen Ergebnissen über die Verteilung hyperbolischer Längen einfach geschlossener Multikurven und könnte den Weg bahnen zu vielen weiteren Anwendungen sowohl in der Geometrie wie auch in den Quantenfeldtheorien.

References

[1] P. Mnev, Quantenmechanik auf Graphen, Jahrbuch der Max-Planck-Gesellschaft (2016).

[2] P. Dunin-Barkowski, N. Orantin, S. Shadrin, and L. Spitz, Identification of the Givental formula with the spectral curve topological recursion procedure, Communications in Mathematical Physics **328**, 669–700 (2014), arXiv:1211.4021 [math-ph].

[3] B. Eynard and N. Orantin, Computation of open Gromov-Witten invariants for toric Calabi-Yau 3-folds by topological recursion, a proof of the BKMP conjecture, Communications in Mathematical Physics **337**, 483–567 (2015), arXiv:1205.1103 [math-ph].

[4] M. Mirzakhani, Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces, Inventiones Mathematicae **167**, 179–222 (2007).

[5] J. Andersen, G. Borot, and N. Orantin, Geometric recursion, 2017, arXiv:1711.04729 [math.GT].