

HIGGSBÜNDEL UND DARSTELLUNGSVARIETÄTEN

JAN SWOBODA

ZUSAMMENFASSUNG. Wir diskutieren den Modulraum der Lösungen von Hitchins Selbstdualitätsgleichungen und dessen Zusammenhang mit Darstellungsvarietäten. Anschließend werden neuere Resultate über das Degenerationsverhalten von Lösungen für große Higgsfelder vorgestellt.

ABSTRACT. We discuss the moduli space of solutions to Hitchin's self-duality equations and its connection with representation varieties. Afterwards some recent results concerning the degeneration profile of solutions for large Higgs fields will be presented.

1. Paralleltransport und Darstellungen von Fundamentalgruppen

Betrachtet man in der Ebene \mathbb{R}^2 oder im üblichen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 eine geschlossene Kurve c mit demselben Anfangs- und Endpunkt p , so kann man die folgende einfache Beobachtung machen: verschiebt man einen im Punkt p angehefteten Vektor v parallel längs c , so kommt man nach einem „Umlauf“ wieder im gleichen Vektor v an. Beschreibt man die Kurve mittels einer differenzierbaren Abbildung $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ bzw. $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, so erhält man, ausgehend von $v = v(0)$, zu jedem Zeitpunkt t einen im Punkt $c(t)$ angehefteten Vektor $v(t)$. Die Parallelität dieses Vektorfeldes übersetzt sich in die Gleichung $\nabla_{\dot{c}}v = 0$, die ausdrückt, dass die Ableitung von v in Richtung des Geschwindigkeitsfeldes \dot{c} von c verschwindet. Unabhängig von der Wahl der Kurve c oder des Vektors $v = v(0)$ gilt also stets $v(1) = v(0)$.

Die Situation ändert sich völlig, wenn man diesen Paralleltransport von Vektoren nicht im euklidischen Raum, sondern längs Kurven auf einer Sphäre betrachtet. Dies ist in **Abbildung 1** illustriert, wo die Kurve c ein sogenanntes sphärisches Dreieck bildet. Nach Ausführen des Paralleltransports ist der Vektor gegenüber dem Ausgangsvektor um einen Winkel gedreht (während seine Länge die gleiche geblieben ist). Welcher Winkel dabei auftritt, hängt von der Wahl des Weges c ab, längs dessen verschoben wird. Es lässt sich zeigen, dass für die Einheitssphäre der Winkel mit dem Inhalt der von c (in positivem Uhrzeigersinn) berandeten Fläche übereinstimmt.

Der Grund für dieses unterschiedliche Verhalten des Paralleltransports liegt im Vorhandensein von Krümmung im Fall der Sphäre, während hingegen

die Ebene und der dreidimensionale Raum flach sind.

In der Geometrie interessiert man sich für Verallgemeinerungen der Konzepte Paralleltransport und Krümmung, die (anders als im Beispiel der Sphäre) ohne Rückgriff auf den umgebenden Raum auskommen. An die Stelle einer Fläche im dreidimensionalen Raum tritt nun eine abstrakte n -dimensionale Mannigfaltigkeit M . Diese Räume sehen zwar lokal immer noch aus wie ein Raum \mathbb{R}^n , jedoch lassen sich diese lokalen „Karten“ auf vielfältige Weisen zu globalen Objekten verkleben, sodass eine interessante Klasse von Räumen entsteht.

Beispiele 2-dimensionaler Mannigfaltigkeiten (die in dieser Dimension auch als Flächen bezeichnet werden) sind die Sphäre (**Abbildung 1**) und die in **Abbildung 2** dargestellte Fläche. Es handelt sich hierbei jeweils um kompakte Mannigfaltigkeiten. Kompakte Mannigfaltigkeiten zeichnen sich dadurch aus, dass auf ihnen eine stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ nicht beliebig große Werte annehmen kann. Kompakte Flächen werden nach ihrem sogenannten Geschlecht unterschieden. Das ist die Anzahl von Henkeln, die an eine Sphäre angeheftet werden müssen, um M zu erzeugen. So hat z. B. die Sphäre das Geschlecht 0, ein Torus (das ist die Oberfläche eines Fahrrad-schlauches) das Geschlecht 1, und die Fläche aus **Abbildung 2** hat das Geschlecht 3.

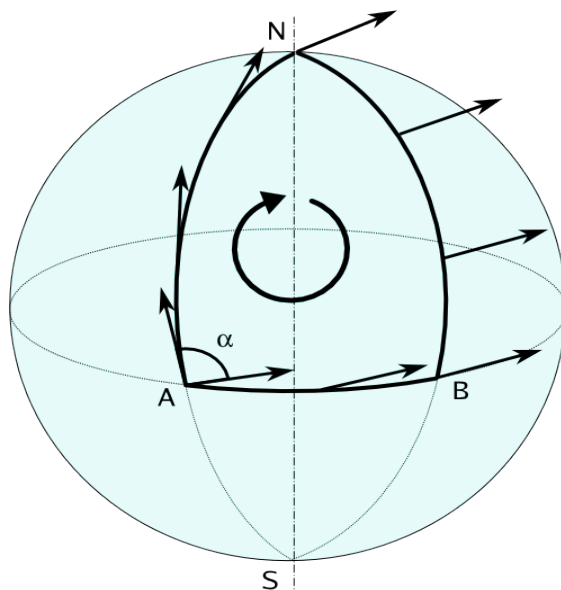


ABBILDUNG 1. Paralleltransport längs eines sphärischen Dreiecks.

© wikipedia, public domain/Alexandrov

In einem weiteren Verallgemeinerungsschritt ersetzen wir Vektorfelder, also Vorschriften, die jedem Punkt einen Tangentialvektor zuordnen, durch sogenannte Schnitte in einem Vektorbündel und untersuchen ihre Parallelität. Das soll nun genauer erläutert werden. Ein reelles bzw. komplexes Vektorbündel E vom Rang k erhält man, indem man an jeden Punkt der Mannigfaltigkeit M einen Vektorraum so anheftet, dass diese Familie von Vektorräumen lokal über einer Karte U wie ein Produkt $U \times \mathbb{R}^k$ bzw. $U \times \mathbb{C}^k$ aussieht. Die Projektion auf den ersten Faktor in diesem lokalen Bild induziert eine Projektionsabbildung $\pi: E \rightarrow M$, wobei das Urbild $E_p = \pi^{-1}(p)$ jedes Punktes $p \in M$ (die sogenannte Faser über p) dem in p angehefteten Vektorraum entspricht. Ein Schnitt von E ist eine Abbildung $\varphi: M \rightarrow E$ mit $\pi \circ \varphi = \text{id}$, mit anderen Worten: dem Punkt $p \in M$ wird ein Vektor in seiner Faser E_p über p zugeordnet. Ein wichtiges Beispiel eines reellen Vektorbündels ist das zu jeder Mannigfaltigkeit M assoziierte Tangentialbündel TM , dessen Faser E_p über einem Punkt $p \in M$ aus dem Vektorraum aller Tangentialvektoren an p besteht. Die Schnitte von TM sind Vektorfelder.

Um den für Funktionen vertrauten Kalkül der Differentialrechnung auf Schnitte von Vektorbündeln zu verallgemeinern, muss man ihre Richtungsableitungen bilden können. Schon um auszudrücken, dass ein Schnitt konstant ist, sind Fasern von E über verschiedenen Punkten miteinander in Beziehung zu setzen. Hierzu ist es nötig, als weitere Struktur einen sogenannten Zusammenhang ∇ auf E zu wählen. Damit ist eine Abbildung ∇ gemeint, die jedem



ABBILDUNG 2. Kompakte Fläche vom Geschlecht 3.
© wikipedia, GNU Free Documentation License, Version 1.2/Antonelli

Vektorfeld X auf M und jedem Schnitt φ von E einen weiteren Schnitt $\nabla_X \varphi$ von E zuordnet. Diesen kann man als Richtungsableitung von φ in Richtung von X auffassen. Dabei wird gefordert, dass die üblichen Rechenregeln der Differentialrechnung und insbesondere die Leibnizregel erfüllt sind:

$$\nabla_X(f\varphi) = f\nabla_X\varphi + (\nabla_X f)\varphi$$

für jede Funktion f auf M . Zusammenhänge lassen sich auch mittels Differentialformen beschreiben. In lokalen Koordinaten x, y (der Einfachheit halber sei hier M 2-dimensional) bilden die Vektorfelder ∂_x bzw. ∂_y , bestehend aus den Einheitsvektoren in Richtung der x - bzw. y -Koordinate, in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraumes, sodass ∇ schon durch ∇_{∂_x} und ∇_{∂_y} festgelegt wird. Man schreibt formal:

$$\nabla\varphi = (\nabla_{\partial_x}\varphi)dx + (\nabla_{\partial_y}\varphi)dy.$$

Eine solche Darstellung ergibt auch global Sinn, wobei dx und dy dann Schnitte in dem sogenannten Kotangentialbündel, dem zu TM dualen Vektorbündel, sind. Den Ausdruck $\nabla\varphi$ bezeichnet man als eine E -wertige 1-Form.

Während es für das Tangentialbündel der Sphäre in **Abbildung 1** einen natürlichen Zusammenhang gibt, den sogenannten Levi-Civita-Zusammenhang, ist im Allgemeinen die Wahl eines Zusammenhangs ∇ keineswegs kanonisch; es existieren sehr viele unterschiedliche Zusammenhänge. Im weiteren nehmen wir an, dass E ein komplexes Vektorbündel ist. Nach Wahl eines Zusammenhangs überträgt sich die anfangs für eine geschlossene Kurve c eingeführte Gleichung

$$(1) \quad \nabla_{\dot{c}}v = 0$$

für den Paralleltransport unmittelbar auf die neue Situation. Es handelt sich bei (1) um eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung. Aus der Theorie solcher Gleichungen weiß man, dass es zu jedem Anfangswert $v(0)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $v(t)$ gibt, sodass die Zuordnung $v = v(0) \mapsto g(c, \nabla)v := v(1)$ eine umkehrbare lineare Selbstabbildung der Faser $E_p = \mathbb{C}^k$ ist und damit durch eine invertierbare $(k \times k)$ -Matrix $g(c, \nabla)$ komplexer Zahlen beschrieben werden kann:

$$(2) \quad g(c, \nabla) \in \text{Gl}(k, \mathbb{C}), \quad g(c, \nabla)v(0) = v(1).$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo $g(c, \nabla)$ nicht von der Wahl des geschlossenen Weges c , sondern nur von dessen Homotopieklasse $[c]$ abhängt. Ein weiterer Weg c_1 mit Anfangs- und Endpunkt p wird dabei als zu c homotop bezeichnet, wenn er sich stetig in c deformieren lässt. Die Menge aller Homotopieklassen von geschlossenen Wegen $c: [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = c(1) = p$, zusammen mit der Operation des Hintereinanderausführens, liefert die sogenannte Fundamentalgruppe $\pi_1(M, p)$ von M . Im Beispiel der Kreislinie ist dies die additive Gruppe der ganzen Zahlen \mathbb{Z} . Da die Fundamentalgruppe offensichtlich nur über den Teil von M eine Information enthält, der mit p durch einen Weg verbindbar ist, nehmen wir im folgenden an, dass dies

für alle Punkte in M gelte. Man nennt solche Mannigfaltigkeiten zusammenhängend.

In Verallgemeinerung des oben diskutierten euklidischen Raumes lässt sich nun zeigen, dass die lineare Abbildung $g(c, \nabla)$ in (2) genau dann nur von der Homotopieklasse $[c] \in \pi_1(M, p)$ von c abhängt, wenn der zugrundeliegende Zusammenhang ∇ flach ist, d. h. die ∇ zugeordnete Krümmung

$$F^\nabla(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$$

verschwindet. Hierbei bezeichnen X, Y Vektorfelder auf M und $[X, Y]$ ist ihr Kommutator, ein weiteres Vektorfeld. Für jeden solchen flachen Zusammenhang ∇ induziert (2) eine Darstellung der Fundamentalgruppe, d. h. einen Gruppensomorphismus

$$(3) \quad \rho^\nabla : \pi_1(M, p) \rightarrow \mathrm{Gl}(k, \mathbb{C}), \quad [c] \mapsto g(c, \nabla).$$

Das Studium der Darstellungen von Fundamentalgruppen ist eine bis in die jüngste Zeit aktive Forschungsrichtung innerhalb der Geometrie und der geometrischen Gruppentheorie. Dabei interessiert man sich weniger für einzelne Darstellungen, sondern betrachtet vielmehr ihre Gesamtheit, d. h. man studiert die sogenannte Darstellungsvarietät aller (unzerlegbarer) Gruppensomorphismen von $\pi_1(M, p)$ nach $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{C})$ oder auch in andere Matrixgruppen. Es ist ein klassisches Resultat, dass die Abbildung

$$\nabla \mapsto \rho^\nabla$$

eine eindeutige Zuordnung zwischen dem Modulraum der flachen Zusammenhänge und der Darstellungsvarietät herstellt.

2. Higgsbündel und Hitchins Selbstdualitätsgleichungen

Einen ganz anderen Zugang zum Studium von Darstellungsvarietäten eröffnen die von Hitchin erstmalig untersuchten Selbstdualitätsgleichungen. Hierbei handelt es sich um ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, die sich allerdings nur für Riemannsche Fläche und gewisse höherdimensionale Verallgemeinerungen davon formulieren lassen. Bei einer (kompakten) Riemannschen Fläche Σ handelt es sich zunächst um eine der oben beschriebenen kompakten Flächen, deren Geschlecht wir als größer oder gleich zwei annehmen wollen. Im Gegensatz zu bloß differenzierbaren Flächen entstehen Riemannsche Flächen durch geeignetes Verkleben von Gebieten in der komplexen Ebene \mathbb{C} (anstelle von \mathbb{R}^2). Dadurch wird sein Tangentialbündel $T\Sigma$ zu einem komplexen Vektorbündel vom Rang 1. Die komplexe Struktur der Riemannschen Fläche Σ erlaubt es, jede 1-Form φ mit Werten in einem komplexen Vektorbündel in ihren sogenannten $(1, 0)$ - bzw. $(0, 1)$ -Anteil zu zerlegen. In lokalen Koordinaten schreibt sich dies folgendermaßen

$$\varphi = \varphi_1 dz + \varphi_2 d\bar{z},$$

mit lokalen Schnitten φ_1, φ_2 von E . So hat man auch eine Zerlegung des Zusammenhangs

$$(4) \quad \nabla = \nabla_{\partial_z} dz + \nabla_{\bar{\partial}_z} d\bar{z}.$$

Im weiteren nehmen wir an, dass das Vektorbündel E mit einem festen Skalarprodukt h versehen ist, und betrachten nur noch sogenannte unitäre Zusammenhänge auf E . Das sind Zusammenhänge, für die das Skalarprodukt h parallel ist, und die deshalb durch die Gleichung

$$\nabla_X h(s_1, s_2) = h(\nabla_X s_1, s_2) + h(s_1, \nabla_X s_2)$$

beschrieben werden, wobei X ein Vektorfeld auf Σ ist und s_1, s_2 Schnitte von E sind. Ein unitärer Zusammenhang zeichnet sich dadurch aus, dass er schon durch seinen $(0, 1)$ -Anteil vollständig bestimmt ist. Traditionell bezeichnet man unitäre Zusammenhänge mit A oder auch d_A , ihre Krümmung mit F_A und schreibt die Zerlegung in (4) als $d_A = \partial_A + \bar{\partial}_A$. In lokalen Koordinaten ist die Wirkung von $\bar{\partial}_A$ (und entsprechend von ∂_A) auf einen lokalen Schnitt $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ von E durch die Formel

$$\bar{\partial}_A \varphi = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}} + \sum_{j=1}^k \alpha_{1j} \varphi_j, \dots, \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}} + \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} \varphi_j \right) d\bar{z}$$

gegeben, wobei die Koeffizientenfunktionen α_{ij} durch den $(0, 1)$ -Anteil des Zusammenhangs A festgelegt sind.

Bei den Selbstdualitätsgleichungen handelt es sich nun um das System der partiellen Differentialgleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} 0 = \bar{\partial}_A \Phi \\ 0 = F_A + [\Phi \wedge \Phi^*] \end{cases}$$

für einen unitären Zusammenhang d_A und eine $(1, 0)$ -Form Φ mit Werten in den Endomorphismen $\text{End}(E)$ von E , ein sogenanntes Higgsfeld. Dabei ist Φ^* die sogenannte Adjungierte zu Φ , eine $\text{End}(E)$ -wertige $(0, 1)$ -Form, und $\Phi \wedge \Phi^*$ ist ihr Produkt, eine $\text{End}(E)$ -wertige $(1, 1)$ -Form. Weiter nutzt man, dass der vom Zusammenhang A kommende Differentialoperator $\bar{\partial}_A$ nicht nur auf Schnitten von E wirkt, sondern auch auf den Schnitten vieler anderer Vektorbündel, die man aus E konstruieren kann, so beispielsweise auch auf den Differentialformen mit Werten in den Endomorphismen von E .

Die erste der beiden Gleichungen in (5) besitzt als Symmetrien die unendlich-dimensionale Gruppe \mathcal{G}^c der komplexen Eichtransformationen. Diese sind Schnitte in einem gewissen Bündel über Σ , die sich lokal als Funktionen mit Werten in der Matrixgruppe $\text{Sl}(k, \mathbb{C})$ der komplexen $(k \times k)$ -Matrizen mit Determinante 1 schreiben lassen. Eine Eichtransformation g wirkt dabei auf Higgsfelder Φ durch Konjugation, d. h. sie bildet Φ auf das Higgsfeld $g^{-1} \Phi g$ ab. Eine ähnliche Wirkung besteht auch auf den Zusammenhängen A , sodass

sie auf den diesen zugeordneten Operatoren $\bar{\partial}_A$ wieder durch Konjugation wirkt. Die zweite der Selbstdualitätsgleichungen (5) ist hingegen nicht invariant unter der Wirkung von \mathcal{G}^c . Lediglich die Untergruppe der unitären Eichtransformationen \mathcal{G} , immer noch unendlich-dimensional und bestehend aus den Schnitten, die in lokaler Schreibweise Werte in den unitären Matrizen der Determinante 1 annehmen, lässt auch die zweite Gleichung invariant.

Zwei Lösungen der Gleichung (5), die durch Anwenden einer unitären Eichtransformationen auseinander hervorgehen, werden nicht weiter unterschieden, sondern als äquivalent angesehen. Die Menge \mathcal{M}_{sd} aller Äquivalenzklassen von (unzerlegbaren) Lösungen von (5) wird als Modulraum der Lösungen bezeichnet. Es handelt sich hierbei um eine komplexe Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $12(\gamma - 1)$ (wobei γ das Geschlecht von Σ ist), deren topologische und geometrische Eigenschaften bislang nur teilweise verstanden sind. Einige offene Fragen in diesem Zusammenhang werden im Anschluss diskutiert. An dieser Stelle sei nur bemerkt, dass \mathcal{M}_{sd} eine nichtkompakte Mannigfaltigkeit ist, was daran liegt, dass Lösungen (A, Φ) von (5) mit beliebig großem Higgsfeld Φ existieren. Ein natürliches Maß für die Größe von Φ ist dabei seine L^2 -Norm, die definiert ist als

$$\|\Phi\|_{L^2} = \left(\frac{i}{2} \int_{\Sigma} \text{tr}(\Phi \wedge \Phi^*) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Worin besteht nun der oben erwähnte Zusammenhang mit Darstellungsvarietäten? Diese kommen ins Spiel, wenn man für eine Lösung (A, Φ) den Ausdruck $A + \Phi + \Phi^*$ betrachtet. Eine kurze Rechnung zeigt, dass es sich bei $A + \Phi + \Phi^*$ um einen flachen Zusammenhang handelt. Die Zuordnung $(A, \Phi) \mapsto A + \Phi + \Phi^*$ bestimmt daher eine Abbildung von \mathcal{M}_{sd} nach \mathcal{M} , und diese ist, wie Donaldson mit analytischen Methoden zeigen konnte, eindeutig.

3. Degenerationen von Lösungen

Zum Abschluss soll ein neues Ergebnis über das Degenerationsverhalten von Lösungen der Selbstdualitätsgleichungen (5) im Limes $\|\Phi\|_{L^2(\Sigma)} \rightarrow \infty$ für Higgsfelder vom Rang 2 vorgestellt werden. Dieses wurde im Rahmen eines gemeinsamen Forschungsprojektes von Rafe Mazzeo (Stanford), Hartmut Weiß (LMU München), Frederik Witt (Münster) und Jan Swoboda (MPI für Mathematik, Bonn) erzielt.

Ausgangspunkt ist die folgende reskalierte Version der Selbstdualitätsgleichungen:

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = \bar{\partial}_A \Phi \\ 0 = F_A + t^2[\Phi \wedge \Phi^*] \end{cases}$$

für einen Parameter $t > 0$. Zu jedem Wert von t erhalten wir wiederum einen Modulraum $\mathcal{M}_{\text{sd}}^t$ von Lösungen. Hierbei sind für je zwei Parameterwerte t_0 und t_1 die zugehörigen Modulräume offenbar diffeomorph. Ziel ist es nun, den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ zu verstehen.

Hierzu wird eine Lösung (A, Φ) der Gleichung $\bar{\partial}_A \Phi = 0$ zunächst fest gewählt. Wie oben bemerkt, ist diese Gleichung invariant unter der Wirkung der Gruppe \mathcal{G}^c der komplexen Eichtransformationen. Nach einem Resultat von Hitchin enthält der komplexe Eichorbit von (A, Φ) eine (modulo unitärer Eichtransformationen eindeutig bestimmte) Lösung $g^*(A, \Phi)$ beider Selbstdualitätsgleichungen. Insbesondere erhält man zu jedem Parameter $t > 0$ genau eine komplexe Eichtransformation g_t (mit $g_t^* = g_t$ selbstadjungiert) so, dass $g_t^*(A, \Phi)$ die reskalierten Selbstdualitätsgleichungen (6) zum Parameter t erfüllt. Es gilt nun, g_t für $t \rightarrow \infty$ zu studieren. Als Kandidat für eine Limes Eichtransformation wurde dabei diejenige (singuläre) Eichtransformation g_∞ ausgemacht, die simultan A in einen flachen Zusammenhang A_∞ transformiert und dabei Φ in ein sogenanntes normales Higgsfeld $\Phi_\infty = g_\infty^{-1} \Phi g_\infty$ überführt. Hierbei nennen wir Φ_∞ normal, wenn es punktweise die übliche Normalitätsbedingung $\Phi_\infty^* \Phi_\infty = \Phi_\infty \Phi_\infty^*$ erfüllt. Diese Bedingung ist jedoch nicht erfüllbar für die endliche Menge von Punkten

$$\mathfrak{p} = \{p \in \Sigma \mid \Phi(p) \neq 0, \det \Phi(p) = 0\}.$$

Es zeigt sich, dass g_∞ genau in den Punkten von \mathfrak{p} singulär ist. Ebenso weist der transformierte Zusammenhang A_∞ dort einen Pol der Ordnung 1 auf, während Φ_∞ in solchen Punkten zumindest stetig ist.

Eine Verklebekonstruktion zeigt in einem anschließenden Schritt, dass man mit g_∞ tatsächlich die richtige Limes Eichtransformation gefunden hat. Hierzu betrachtet man die Gleichungen (6) auf kleinen Scheiben \mathbb{D}_p um Punkte $p \in \mathfrak{p}$. Dort ist es möglich, eine Familie $g_{p,t}$ von Eichtransformationen explizit so zu bestimmen, dass einerseits $g_{p,t}^*(A, \Phi)$ eine Lösung zum Parameter t ist und andererseits $g_{p,t}$ auf \mathbb{D}_p gegen g_∞ konvergiert. Diese Konstruktion verwendet Modellösungen des Problems auf \mathbb{R}^2 , die bereits in einer früheren Arbeit von Gaiotto, Moore und Neitzke betrachtet worden sind. Die Eichtransformationen $g_{p,t}$ zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Werte am Rand von \mathbb{D}_p mit denen von g_∞ bis auf einen Fehler übereinstimmen, der für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen 0 abfällt. Diese Eigenschaft ermöglicht es, für große Parameterwerte t die Lösungen auf den Scheiben \mathbb{D}_p und dem Rest von Σ miteinander zu verkleben und so zu einer Lösung von (6) zu gelangen. Diese konvergiert per Konstruktion für $t \rightarrow \infty$ gegen die zuvor bestimmte singuläre Limeslösung (A_∞, Φ_∞) . Das Degenerationsverhalten der so konstruierten Lösungen (A_t, Φ_t) ist in **Abbildung 3** dargestellt. Diese zeigt für die Parameterwerte $t = 100$, $t = 200$ und $t = \infty$ die Graphen von $|A_t|$ (d. h. der punktweisen Norm des Zusammenhangs A_t) als Funktion des Abstandes r zu einem fest gewählten Punkt $p \in \mathfrak{p}$.

Indem man das Paar (A, Φ) variiert und sämtliche Limeskonfigurationen (A_∞, Φ_∞) als Randpunkte zu \mathcal{M}_{sd} hinzufügt, erhält man eine natürliche Kompaktifizierung des Modulraumes, zusammen mit einer relativ präzisen Beschreibung einer Umgebung seines Randes. Eine feinere Untersuchung der geometrischen Eigenschaften von \mathcal{M}_{sd} für große Higgsfelder Φ , also nahe des Randes, bleibt eine Aufgabe für zukünftige Forschung. Genauere Kenntnisse über dessen asymptotische Geometrie könnten insbesondere Auskunft über die sogenannten L^2 -Bettizahlen von \mathcal{M}_{sd} geben. Diese Kenngrößen sind insbesondere für nichtkompakte Mannigfaltigkeiten von Interesse. Interessanterweise gibt es hierüber exakte Vorhersagen aus der Physik, die sowohl \mathcal{M}_{sd} als auch verwandte Modulräume betreffen. Für \mathcal{M}_{sd} selbst weiß man bislang nur, dass diese Invarianten außerhalb der mittleren Dimension $6(\gamma - 1)$ verschwinden.

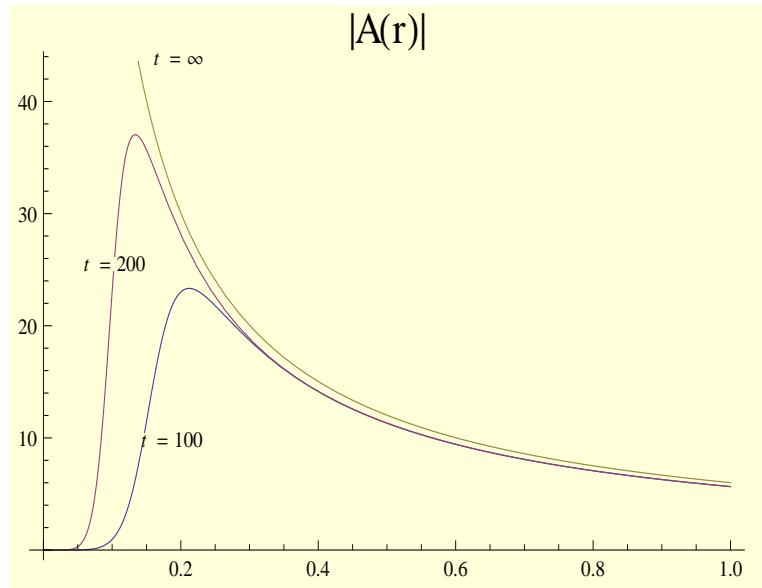


ABBILDUNG 3. Degenerationsverhalten der Komponente A_t von Lösungspaaren (A_t, Φ_t) der Selbstdualitätsgleichungen im Limes $t \rightarrow \infty$.

© Max-Planck-Institut für Mathematik/Swoboda