KURVEN ZÄHLEN – ALT, NEU UND VERFEINERT

LOTHAR GÖTTSCHE

Zusammenfassung. Das Zählen von algebraischen Kurven auf Flächen ist ein klassisches Thema der algebraischen Geometrie, das durch die Stringtheorie aus der Physik wieder ins Zentrum des Interesses gerückt wurde. Nach einer kurzen Einführung in die enumerativen Invarianten von Kurven wird eine Verfeinerung betrachtet: statt einer Zahl erhält man ein Polynom. Es hat Beziehungen zu Invarianten der reellen algebraischen Geometrie und der tropischen Geometrie.

Abstract. The counting of algebraic curves on surfaces is a classical topic of algebraic geometry, which has gained new interest because of the advent of string theory from physics. After a short introduction into enumerative invariants of curves a refinement is considered. Instead of a number of curves one gets a polynomial, which can be related to invariants of real and tropical algebraic geometry.

1. Einleitung

Die algebraische Geometrie befasst sich mit algebraischen Varietäten; das sind Lösungsmengen von Polynomialgleichungen in mehreren Unbestimmten. Zum Beispiel ist der Einheitskreis $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2=1\}$ die Lösungsmenge der Gleichung $x^2+y^2=1$ über den reellen Zahlen. Es ist einfacher über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zu arbeiten, wo jede Polynomgleichung Lösungen hat. Die Lösungsmengen sind normalerweise nicht kompakt, d. h. Punkte können ins Unendliche davonlaufen. Der affine Raum $\mathbb{C}^n$ von n-Tupeln komplexer Zahlen $(a_1,\dots,a_n)$ ist selbst nicht kompakt, er wird aber durch Hinzunahme von Punkten im „Unendlichen" zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ kompaktifiziert. Dazu fügt man dem $\mathbb{C}^n$ für jede seiner Geraden durch den Ursprung noch einen weiteren Punkt hinzu. In einer anderen Beschreibung des $\mathbb{P}^n$ fasst man seine Punkte als die Geraden in $\mathbb{C}^{n+1}$ auf, die durch den Ursprung gehen, und beschreibt sie mittels sogenannter homogenen Koordinaten $[a_0,\dots,a_n]$. Dabei ist $(a_0,\dots,a_n)$ irgendein Punkt auf der Geraden, verschieden vom Ursprung. Der affine Raum entspricht dabei den Punkten mit den homogenen Koordinaten $[1,a_1,\dots,a_n]$. Algebraische Varietäten in $\mathbb{C}^n$ werden kompaktifiziert, indem man ihren sogenannten Abschluss in $\mathbb{P}^n$ nimmt. Diese sind dann komplex-projektive Varietäten, d. h. Lösungsmengen von homogenen Polynomgleichungen in $\mathbb{P}^n$.

Eine ebene algebraische Kurve C vom Grad d ist zum Beispiel die Nullstellenmenge

$$Z(f) = \{[a_0,a_1,a_2] \in \mathbb{P}^2 \mid f(a_0,a_1,a_2)=0\}$$

eines homogenen Polynoms $f(x_0,x_1,x_2)$ vom Grad d. Für ein allgemeines Polynom f ist die Nullstellenmenge $C=Z(f)$ glatt, d. h. sie sieht in der Nähe jedes Punktes aus wie $\mathbb{C}$. Insgesamt ist C dann eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}$,

mit anderen Worten eine Sphäre mit g Henkeln. Für $d = 1, 2$ ist $g = 0$, d. h. C ist eine Sphäre, für $d = 3$ erhält man eine Sphäre mit einem Henkel, d. h. einen Torus.

$Z(f)$ kann auch Singularitäten haben, d. h. Punkte, in denen C nicht lokal wie $\mathbb{C}$ aussieht. Die einfachste Singularität ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt; dort sieht die Kurve lokal aus wie der transversale Schnitt zweier komplexer Geraden, beschrieben durch die Gleichung $xy = 0$.

Für eine singuläre Kurve gibt es zwei verschiedene Begriffe von Geschlecht. Das arithmetische Geschlecht $a(C) := g(C_s)$ ist das Geschlecht einer glatten Deformation C_s, d. h. man verändert die Gleichung der Kurve leicht, um eine glatte Kurve zu erhalten; zum Beispiel wird aus $xy = 0$ die Gleichung $xy = \epsilon$ für ein kleines ϵ. Das geometrische Geschlecht $g(C) = g(\widetilde{C})$ einer Kurve C ist das Geschlecht der Normalisierung $\widetilde{C}$. Grob gesprochen entsteht diese, indem man C in den Singularitäten auseinander zieht.

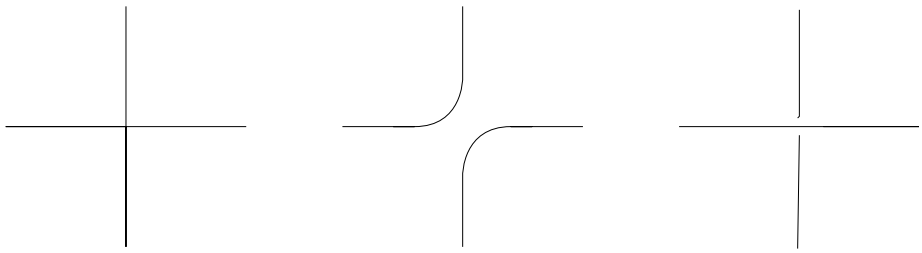

Abbildung 1. Doppelpunkt, Deformation und Normalisierung.

Für eine singuläre Kurve C gilt immer $g(C) < a(C)$. Wenn C nur δ einfache Doppelpunkte als Singularitäten hat, so gilt $g(C) = a(C) - \delta$. Umgekehrt gilt: eine allgemeine ebene Kurve vom Grad d mit $g(C) = a(C) - \delta$ hat genau δ einfache Doppelpunkte als Singularitäten. Mit allgemeiner Kurve ist hier das Folgende gemeint: die Kurven vom Grad d und Geschlecht $g(C)$ bilden selber wieder eine algebraische Varietät und die Kurven, die nicht genau δ Doppelpunkte haben, bilden eine kleinere Untervarietät; sie sind Nullstellenmengen von zusätzlichen Polynomen.

Ein klassisches Problem der enumerativen algebraischen Geometrie ist, den sogenannten Severi-Grad zu bestimmen. Das ist die Anzahl n_d^g der ebenen Kurven vom Grad d mit geometrischem Geschlecht g, die durch $3d - 1 + g$ allgemeine Punkte von $\mathbb{P}^2$ gehen (die Punktbedingungen sind so gewählt, dass die Anzahl endlich wird). Diese Kurven haben genau $\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$ einfache Doppelpunkte, weshalb wir ihre Anzahl auch mit $n_{d,\delta}$ bezeichnen. Für $\delta = 0$ reduziert sich das Problem darauf, $N = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1$ allgemeine Hyperebenen in $\mathbb{P}^N$ miteinander zu schneiden. Daher ist $n_{d,0} = 1$. Für ein beliebiges δ übersetzt sich das Problem in die Aufgabe, eine gewisse δ-kodimensionale Untervarietät des $\mathbb{P}^N$ mit $N - \delta$ allgemeinen Hyperebenen zu schneiden, ein wesentlich komplizierteres Problem. Steiner zeigte 1948, dass $n_{d,1} = 3(d-1)^2$. Die Severi-Grade $n_{d,\delta}$ für beliebige δ wurden schließlich 1998 von Caporaso und Harris durch eine komplizierte Rekursionsformel bestimmt.

Man kann diese Frage auf beliebige algebraische Flächen verallgemeinern. Eine algebraische Fläche S ist eine glatte komplex-projektive Varietät der Dimension 2, d. h. es ist die Nullstellenmenge von homogenen Polynomen in $\mathbb{P}^n$ und sieht lokal aus wie $\mathbb{C}^2$. Ein Linearsystem $|L|$ ist die Menge der Kurven C in S, die Durchschnitte von S mit der Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms vom Grad d im umgebenden $\mathbb{P}^n$ sind. Diese Kurven formen einen projektiven Raum $\mathbb{P}^l$. Der verallgemeinerte Severi-Grad $n_{|L|,\delta}$ (oder $n^g_{|L|}$) ist die Anzahl der Kurven in $|L|$ mit δ einfachen Doppelpunkten, die durch $l-\delta$ vorgegebene allgemeine Punkte gehen.

Es gibt keine einfachen Formeln für die (verallgemeinerten) Severi-Grade. Eine Vermutung von Göttsche (Max-Planck-Institut für Mathematik) aus dem Jahr 1997 sagt aber, dass dies anders wird, wenn das Linearsystem „groß genug" ist, das heißt zum Beispiel wenn $d \geq \delta$. Dann gibt es ein universelles Polynom p_δ in vier Zahlen L^2, LK_S, K_S^2 und $e(S)$, sodass $n_{|L|,\delta} = p_\delta(L^2, LK_S, K_S^2, e(S))$. Dabei ist L^2 die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven in $|L|$, LK_S bzw. K_S^2 sind die Anzahlen der Schnittpunkte des Nullstellenortes einer holomorphen 2-Form auf S mit einer Kurve in $|L|$ bzw. von zwei solchen Nullstellenorten, und $e(S)$ ist die topologische Eulercharakteristik, die später etwas genauer erklärt wird.

Diese Vermutung wurde kürzlich unabhängig voneinander von Tzeng und von Kool, Shende und Thomas bewiesen. Der Beweis von Kool, Shende und Thomas setzt die Severi-Grade in Beziehung zu anderen Invarianten aus der enumerativen Geometrie und der Physik und motiviert eine Verfeinerung der ursprünglichen Vermutung.

2. **Physik und andere Arten, Kurven zu zählen**

Die enumerative Geometrie ist ein recht altes Gebiet der Mathematik; warum beschäftigt man sich heute noch damit? Innerhalb der algebraischen Geometrie ist ein wichtiger Zweig das Studium von Modulräumen. Dies sind algebraische Varietäten, die interessante Objekte parametrisieren, zum Beispiel Kurven. Man beschreibt und versteht diese Modulräume und ihre Gestalt durch geeignete Invarianten, zum Beispiel die Anzahlen von Kurven, die bestimmte Bedingungen erfüllen.

Zusätzliches Interesse kommt aus der Stringtheorie in der Physik. Hier werden Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen durch kleine Schleifen (Strings) beschrieben. Wenn diese sich durch die Raumzeit bewegen, so beschreiben sie eine Riemannsche Fläche, im Idealfall eine algebraische Kurve. Dies hat zur Einführung neuer Methoden und Invarianten und auch zu Vorhersagen über das Zählen von Kurven geführt. Ein besonders interessanter Aspekt für Mathematiker ist, dass es in der Physik oft mehrere verschiedene Arten gibt, dasselbe Phänomen mathematisch zu beschreiben. Das führt häufig zu überraschenden Verbindungen.

Die Gromov-Witten Invarianten zählen Kurven in einer Varietät X, indem sie Abbildungen von Kurven nach X zählen. Sie spielen eine große Rolle in der Stringtheorie; allerdings sind sie weder ganzzahlig, noch zählen sie direkt die Kurven in X. Die Gopakumar-Vafa (oder BPS)-Invarianten aus der Physik sollen diese Schwächen beheben. Es gibt allerdings keine genaue mathematische Definition für sie. Die Donaldson-Thomas und die Pandharipande-Thomas Invarianten schließlich zählen Garben;

das sind kompliziertere Strukturen, die auf den Kurven in X leben. Pandharipande und Thomas haben kürzlich eine Formel vorgeschlagen, die die Gopakumar-Vafa Invarianten aus den Pandharipande-Thomas Invarianten definieren soll (man weiß ja nicht genau, was die Gopakumar-Vafa Invarianten genau sind). Insgesamt sollen all diese verschiedenen Invarianten genau dieselben Informationen enthalten.

Was ist damit gemeint? Der Zusammenhang entsteht durch die Erzeugendenfunktionen: Wenn $a_0, a_1, a_2, \ldots$ interessante Zahlen sind, so ist

$$f(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ihre Erzeugendenfunktion. Dabei ist z zunächst einmal nur eine formale Unbestimmte, aber oft kann man f als eine Funktion von z auffassen, und die analytischen Eigenschaften von f geben dann Auskunft über möglicherweise tiefliegende Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Zahlen a_n.

Für die obengenannten enumerativen Invarianten von Kurven wird vermutet, dass ihre verschiedenen Erzeugendenfunktionen jeweils durch Variablentransformationen auseinander hervorgehen. Das heißt, es besteht kein einfacher Zusammenhang zwischen den einzelnen Zahlen, aber ihre Gesamtheit enthält jeweils dieselbe Information.

In der Physik werden auch verfeinerte BPS-Invarianten betrachtet. Anstatt Zahlen a_n sind dies nun Polynome $A_n(y)$, mit $a_n = A_n(1)$. Sie sollten feinere Informationen über die Gestalt der Modulräume enthalten.

3. **Verfeinerte Invarianten**

Der Beweis der Vermutung von Göttsche durch Kool-Shende-Thomas ist inspiriert durch die Definition der Gopakumar-Vafa Invarianten aus den Pandharipande-Thomas Invarianten und benutzt Eulerzahlen von Hilbertschemata von Punkten auf Kurven.

In der Topologie beschäftigt man sich mit der allgemeinen Gestalt von Räumen, unabhängig davon, ob man sie zum Beispiel dehnt oder streckt, solange man sie nicht auseinanderreißt. Ein Raum, von dem man nur diese Information über seine Gestalt hat, ist ein topologischer Raum. Der Begriff der topologischen Eulercharakteristik (oder einfach Eulerzahl) eines topologischen Raumes X geht auf Eulers Beobachtung zurück, dass die regulären Polyeder stets die Gleichung $e - k + s = 2$ erfüllen, wobei e die Anzahl der Ecken, k die der Kanten und s die der Seiten ist (z. B. ist für den Tetraeder $e = 4, k = 6$ und $s = 4$; für den Würfel dagegen ist $e = 8, k = 12$ und $s = 6$). Um die Eulerzahl von X zu bestimmen, teilt man X in topologische Simplizes auf (Punkte, Kanten, Dreiecke, Tetraeder, ...). Die Eulerzahl ist die alternierende Summe $e(X) = s_0 - s_1 + s_2 - \ldots$ der Anzahlen s_i der i-dimensionalen Simplizes. Diese Anzahl ist unabhängig von der Wahl der Aufteilung und ist die einfachste topologische Invariante von X. Die Beobachtung von Euler sagt in dieser Sprache, dass die Eulerzahl der 2-Sphäre gleich 2 ist. Eine glatte Kurve vom Geschlecht g hat die Eulerzahl $2 - 2g$ (eine Kurve von Geschlecht 0 ist topologisch eine 2-Sphäre).

Das Hilbertschema $Hilb^n(C)$ von n Punkten einer Kurve C parametrisiert Mengen von n Punkten auf C, die aber auch zusammenkommen können. Wenn dies in einer Singularität von C geschieht, gibt es dafür mehrere Möglichkeiten. Deshalb enthält $Hilb^n(C)$ Informationen über die Singularitäten von C. Es sei nun $|L|$ ein Linearsystem auf einer Fläche, $a(L)$ das Geschlecht einer glatten Kurve in $|L|$. Das relative Hilbertschema $Hilb^n(\mathcal{C}_\delta)$ ist die Vereinigung der Hilbertschemata $Hilb^n(C)$ für alle Kurven C in $|L|$, die durch $\dim(|L|) - \delta$ vorgebene Punkte gehen. Dies ist ein Spezialfall des Modulraums der Pandharipande-Thomas Invarianten. Kool-Shende-Thomas definieren Zahlen $n_0, \ldots, n_\delta$ durch eine Variablentransformation an der Erzeugendenfunktion der Eulerzahlen der relativen Hilbertschemata:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e(Hilb^n(\mathbb{C}_\delta))t^n = \sum_{l=0}^{\delta} n_l \cdot t^l (1-t)^{2a(L)-2-2l}.$$

Wir schreiben nun $n_{L,\delta}$ für n_δ. Falls $|L|$ „groß genug" ist, ist der Severi-Grad $n_{|L|,\delta} = n_{L,\delta}$. Die Vermutung folgt nun aus bekannten Eigenschaften des Hilbertschemas.

Wie schon erwähnt ist die Eulerzahl die einfachste topologische Invariante. Was geschieht, wenn man sie durch eine feinere Invariante ersetzt, nämlich durch Hirzebruchs χ_{-y}-Geschlecht $\chi_{-y}(X)$? Dieses ist ein Polynom in einer Unbestimmten y, das Informationen über holomorphe Differentialformen auf X enthält. Es spezialisiert sich für $y = 1$ und -1 zu zwei wichtigen topologischen Invarianten: der Eulerzahl und der Signatur. Die Letztere gibt Auskunft darüber, wie Unterräume von X der halben Dimension sich untereinander schneiden. Durch eine ganz ähnliche Variablentransformation wie oben gewinnt man aus der Erzeugendenfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{-y}(Hilb^n(\mathbb{C}_\delta))t^n$ Laurentpolynome $N_{L,\delta}(y) = N_L^g(y)$ (mit $g = a(L) - \delta$), die sich zu $N_{L,\delta}(1) = n_{L,\delta}$ spezialisieren (Laurentpolynome sind Polynome in y und $1/y$). Das sind die verfeinerten Invarianten. Sie hängen wieder nur von den Schnittzahlen L^2, LK_S, K_S^2 und $e(S)$ ab. Zusätzlich kann man Aussagen über die Gestalt der Erzeugendenfunktion machen. Sie wird zum Teil in Termen sogenannter Jakobifunktionen ausgedrückt. Jakobifunktionen sind Funktionen in zwei Unbestimmten, die in der Zahlentheorie und in der Physik eine große Rolle spielen, wie auch die Modulformen, mit denen sie eng zusammenhängen (siehe zum Beispiel Don Zagier, „q-Reihen und Modulformen", Jahrbuch der Max-Planck-Gesellschaft 2008). Für die unverfeinerten Invarianten spezialisieren sie sich zu Modulformen. Ist S eine sogenannte K3 Fläche (ein Beispiel ist die Nullstellenmenge eines allgemeinen Polynoms vom Grad 4 in $\mathbb{P}^3$), so hängt $N_L^g(y)$ nur von L^2 ab. Schreibt man $N^{L^2/2}(y)$ für $N_L^0(y)$, so gilt

$$\sum_{l=-1}^{\infty} N^l(y) q^n = \frac{1}{q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{20} (1-q^n y)^2 (1-q^n/y)^2}.$$

Die rechte Seite ist eine bekannte Jakobiform; für die unverfeinerten Invarianten (d. h. für $y = 1$) wird der Nenner zur Diskriminate, die wohl bekannteste Modulform.

Was ist die Bedeutung dieser verfeinerten Invarianten, was zählen sie? Zunächst sind es Kandidaten für die verfeinerten BPS-Invarianten aus der Physik. Aber trotzdem ist es noch nicht klar, welche Bedeutung diese Verfeinerung für die Mathematik

hat. Für sogenannte torische Flächen gibt es allerdings überraschende Verbindungen zur reell-algebraischen und zur tropischen Geometrie.

4. **Reelles und tropisches Zählen von Kurven**

Eine torische Fläche ist eine Kompaktifizierung der Menge der Paare nicht verschwindender komplexer Zahlen $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$. Beispiele sind $\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Torische Flächen sind Beispiele reeller algebraischer Flächen, auf denen man von reellen Kurven sprechen kann. Im Folgenden wird der Einfachheit halber nur der Fall der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ betrachtet.

Eine reelle algebraische Kurve C vom Grad d in $\mathbb{P}^2$ ist die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms vom Grad d mit reellen Koeffizienten. Der reelle Ort $C_{\mathbb{R}}$ von C sind die Punkte von C mit reellen Koordinaten. Er ist reell eindimensional, also eine Kurve im üblichen Sinn, während C selbst eine (möglicherweise singuläre) Riemannsche Fläche ist. Es gibt zwei verschiedene Arten reeller Doppelpunkte einer reellen Kurve. Entweder sieht $C_{\mathbb{R}}$ in der Nähe des Doppelpunktes wie der Schnitt zweier reeller Geraden (beschrieben durch $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$) aus, oder der Doppelpunkt ist ein isolierter Punkt von $C_{\mathbb{R}}$ (beschrieben durch $x^2 + y^2 = 0$).

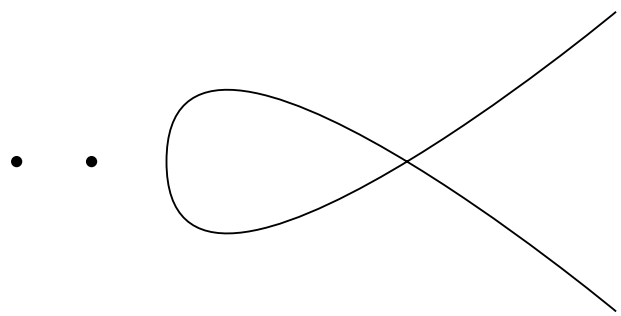

Abbildung 2. Reelle Kurve mit zwei isolierten Doppelpunkten.

Die Welschinger Invariante $w_d^g = w_{d,\delta}$ zählt nun die Anzahl der reellen Kurven vom Grad d und Geschlecht g in $\mathbb{P}^2$ durch $3d - 1 + g$ allgemeine reelle Punkte ($\delta = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$). Diese Kurven haben nur einfache Doppelpunkte als Singularitäten. Jede Kurve wird mit der Multiplizität $(-1)^{s(C)}$ gezählt, wobei $s(C)$ die Anzahl der isolierten reellen Doppelpunkte ist. Umfangreiche numerische Berechnungen untermauern die Vermutung, dass $w_{d,\delta} = N_{d,\delta}(-1)$ für $\delta \leq 3d - 3$, und allgemeiner $w_{|L|,\delta} = N_{L,\delta}(-1)$ für „hinreichend große" Linearsysteme auf torischen Flächen (für allgemeine Flächen gilt das nicht). Diese überraschende Beobachtung gibt zumindest für torische Flächen eine Interpretation von $N_{L,\delta}(y)$ für ein y verschieden von 1.

Eine Interpretation des gesamten Laurentpolynoms $N_{L,\delta}(y)$ ergibt sich in der tropischen enumerativen Geometrie. Sowohl die Severi-Grade $n_{|L|,\delta}$ als auch die Welschinger Invarianten $w_{|L|,\delta}$ können für torische Flächen auch mithilfe der tropischen Geometrie berechnet werden. Für eine kurze Einführung in die tropische Geometrie siehe Itenberg, Mikhalkin „Geometrie im tropischen Grenzfall"(Jahrbuch der Max-Planck-Gesellschaft 2011). Hier zählt man anstatt reellen oder komplexen Kurven

sogenannte tropische Kurven. Diese sind stückweise lineare Graphen in $\mathbb{R}^2$, deren Kanten rationale Steigungen haben. Die Kanten können einander schneiden und haben ein Gewicht (eine positive ganze Zahl). Einige Kanten können auch ins Unendliche laufen, und Steigung und Anzahl dieser unendlichen Kanten bestimmen, welchem Linearsystem auf welcher Fläche sie entsprechen. Ebenen Kurven vom Grad d entsprechen tropische Kurven mit jeweils d unendlichen Kanten, die mit Steigung 1 nach links unten, horizontal nach rechts und vertikal nach oben laufen (siehe **Abbildung 3**).

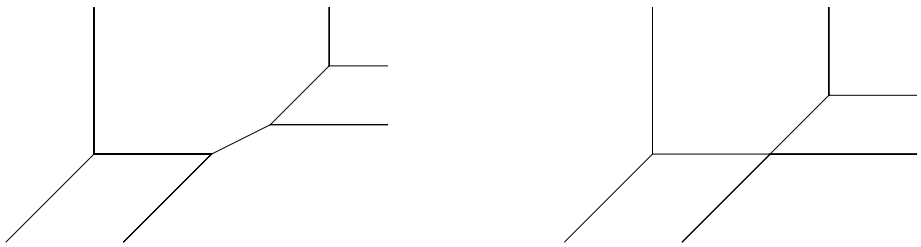

Abbildung 3. Tropische Kurven vom Grad 2.

Für jeden Eckpunkt e des Graphen und jede Kante k, die auf e trifft, sei p_k der kürzeste Gittervektor, der mit derselben Steigung wie k von e fortzeigt, und w_k das Gewicht der Kante. Dann erfüllen tropische Kurven die folgende Bedingung: Für jede Ecke e summieren sich die $p_k w_k$ der Kanten bei e zu 0. Tropische Kurven C haben ein Geschlecht, es ist die Anzahl der Zykel in C. Das Korrespondenzprinzip von Mikhalkin besagt jetzt, das der Severi-Grad n_d^g gleich der Anzahl der trivalenten tropischen Kurven vom Geschlecht g durch $3d-1+g$ allgemeine Punkte des $\mathbb{R}^2$ ist, gezählt mit geeigneten Multiplizitäten (trivalent bedeutet, dass sich in jeder Ecke genau 3 Kanten treffen). Ähnliches gilt für die verallgemeinerten Severi-Grade $n_{|L|,g}$. Dieselben tropischen Kurven, mit anderen Multiplizitäten gezählt, ergeben die Welschinger Invarianten $w_{d,g}$ and $w_{|L|,g}$. Die Multiplizität $m(C)$ für die Severi-Grade ergibt sich wie folgt: für jede Ecke e ist $m(e)$ die Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $w_{k_1}p_{k_1}$ und $w_{k_2}p_{k_2}$ aufgespannt wird, wobei k_1 und k_2 zwei der Kanten sind, die sich in e treffen (sie ist unabhängig von der Wahl des Kantenpaars). Dann ist $m(C)$ das Produkt der $m(e)$ über alle Ecken von C. Analog ist die Welschinger Multiplizität $w(C)$ das Produkt der $w(e)$ über die Ecken von C, mit $w(e) = (-1)^{(m(e)-1)/2}$ für $m(e)$ ungerade, und 0 sonst.

Block und Göttsche definieren eine verfeinerte Multiplizität $M(C)$ als das Produkt der Laurentpolynome

$$M(e) := \frac{y^{m(e)/2} - y^{-m(e)/2}}{y^{1/2} - y^{-1/2}} = y^{(m(e)-1)/2} + \ldots + y^{-(m(e)-1)/2}$$

über die Ecken. $M(e)$ ist ein Laurentpolynom in $y^{1/2}$, aber es stellt sich heraus, dass $M(C)$ tatsächlich ein Laurentpolynom in y ist. Sie definieren den tropischen verfeinerten Severi-Grad $N_d^{trop,g}(y)$ als Summe der $M(C)$ über die tropischen Kurven vom Grad d und Geschlecht g durch $3d-1+g$ allgemeine Punkte. Aus der Definition

ergibt sich, dass $N_d^{trop,g}(1) = n_d^g$ und $N_d^{trop,g}(-1) = w_d^g$, das heißt, die verfeinerten tropischen Severi-Grade interpolieren zwischen den Severi-Graden und den Welschinger Invarianten. Schließlich untermauern umfangreiche numerische Rechnungen die Vermutung, dass $N_d^{trop,g}(y) = N_d^g(y)$ für $d \geq \delta/2 + 1$. Das heißt, die verfeinerten Invarianten haben zumindest in der tropischen Geometrie eine Interpretation.