# DEFORMATIONSQUANTISIERUNG UND DIE FORMEL VON KONTSEVICH

C. A. ROSSI

Zusammenfassung. Nach einem kurzen Vergleich der kommutativen, klassischen Observablenalgebra in der Hamiltonschen Mechanik mit der nichtkommutativen Observablenalgebra in der Quantenmechanik wird eine algebraische Prozedur (Deformationsquantisierung) eingeführt, die die Quantisierung mathematisch beschreibt: Insbesondere wird die universelle Formel von Kontsevich im Detail erklärt. Am Ende werden einige (offene) Probleme in Bezug auf Deformationsquantisierung diskutiert, von denen einige am MPIM, Bonn betrachtet und gelöst wurden.

Abstract. After a brief comparison between the commutative algebra of classical observables in Hamiltonian mechanics and non-commutative quantum observables in quantum mechanics, an algebraic way of realizing the quantization process (deformation quantization) is introduced and in particular the universal formula of Kontsevich is explained in some details. Finally, some (open) problems related to deformation quantization are considered, some of which have been positively addressed at the MPIM, Bonn.

## 1. Klassische Hamiltonsche Mechanik und Quantenmechanik

1.1. **Hamiltonsche Mechanik und die Poisson Klammer.** In der klassischen Physik stellt sich oft die Aufgabe, ein Mehrteilchensystem, auf das (äußere) Kräfte wirken, mathematisch zu beschreiben. Dazu fasst man die Gesamtheit aller Orts- und Impulskoordinaten der Teilchen zu einem Punkt $x = (q_i, p_i)$ in einem (in der Regel hochdimensionalen) $\mathbb{R}^{2n}$ zusammen. Die ersten $n$ Einträge sind die Ortskoordinaten $q_i$, die zweiten die Impulskoordinaten $p_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Die Hamiltonsche Funktion $H$ des physikalischen Systems, das man studieren möchte, ist eine differenzierbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^{2n}$, welche die Gesamtenergie des Systems darstellt. Unter einer Observablen versteht man (hier) eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f$ auf dem $\mathbb{R}^{2n}$. Observable können punktweise addiert und multipliziert werden, und diese zwei Operationen machen die Gesamtheit aller Observablen $A := C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ zu einer kommutativen Algebra, d. h. Summe und Produkt in $A$ sind assoziativ, kommutativ und kompatibel miteinander. Insbesondere ist das Produkt von Observablen kommutativ.

Die zeitliche Entwicklung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^{2n}$ wird durch die Hamilton–Jacobi Differentialgleichung beschrieben, d. h. durch die Lösungen $x \equiv x(t) = (q_i(t), p_i(t))$ des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1}$$

Sei nun $x(t)$ eine Lösung der Gleichung (1). Man würde nun gerne die Evolution einer Observablen $F$ entlang $x(t)$ untersuchen, d. h. man möchte $F(x(t))$ verstehen. Differenziert man den Ausdruck $F(x(t))$ nach $t$, so erhält man mit Hilfe der Kettenregel die Identität

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)(x(t)).$$

Kürzt man den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung mit $\{f, H\}(x(t))$ ab, so bekommt man eine Abbildung $\{\cdot,\cdot\} : A \times A \to A$, die eine antisymmetrische Biderivation ist und die Jacobi Identität erfüllt, d.h. es gelten

$(i)$ $\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$, $\{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \{\{f_2, f_3\}, f_1\} + \{\{f_3, f_1\}, f_2\} = 0$ (Jacobi Identität),

$(ii)$ $\{f_1, f_2 f_3\} = \{f_1, f_2\} f_3 + f_2\{f_1, f_3\}$ (Leibniz Regel).

Die Eigenschaften in (i), also Antisymmetrie und die Jacobi Identität, geben $(A, \{\cdot,\cdot\})$ die Eigenschaft einer Lie Algebra. Erfüllt $\{\cdot,\cdot\}$ zusätzlich die Leibniz Regel in (ii), so spricht man von einer Poisson Struktur auf $A$.

Dies ist nur ein Beispiel einer konstanten Poisson Struktur auf $A = C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$; später wird man allgemeine Poisson Strukturen auf $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ betrachten, wobei $d \geq 2$.

1.2. **Quantenmechanik und Nichtkommutativität.** Der essentielle Unterschied zwischen der klassischen Hamiltonschen Mechanik und der Quantenmechanik ist, dass die Algebra der Observablen im ersten Fall kommutativ, im zweiten Fall dagegen nichtkommutativ ist.

In der Quantenmechanik sind Observable (und somit auch das Analogon der Hamiltonschen Funktion) selbstadjungierte lineare Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$. Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt von (möglicherweise) unendlicher Dimension und man kann sich solche Operatoren als hermitesche Matrizen mit (möglicherweise) unendlich vielen Zeilen und Spalten vorstellen.

In der Mathematik modelliert man die Observablen durch die Menge $\mathcal{A}$ aller linearer Operatoren auf $\mathcal{H}$. Man verzichtet dabei auf die Forderung nach Selbstadjungiertheit der Operatoren, und erhält dadurch auf $\mathcal{A}$ mittels Addition und Komposition von Operatoren die Struktur einer assoziativen, aber im Allgemeinen nichtkommutativen Algebra. Betrachtet man nämlich den sogenannten Ortsoperator $q_i := x_i$ und den Impulsoperator $p_i := \partial_i$ (wobei $x_i$ der Operator "Multipliziere mit $x_i$" und $\partial_i$ der Operator "Nehme die partielle Ableitung nach $x_i$" ist), so manifestiert sich die Nichtkommutativität in den berühmten Heisenbergschen Unschärferelationen

$$[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j],\ [q_i, p_j] = -\delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n,$$

wobei man kurz $[A, B]$ für $AB - BA$ schreibt und $\delta_{ij} = 0$ oder 1 ist, je nachdem ob $i \neq j$ oder $i = j$ ist. Der Kommutator $[\cdot,\cdot]$ als weitere Verknüpfung gibt $\mathcal{A}$ die Struktur einer nichtkommutativen Poisson Algebra. In der Physik bezeichnet man diese nichtkommutative Algebra $\mathcal{A}$ als die (kanonische) Quantisierung des $\mathbb{R}^{2n}$.

Es ist eine alte, auf Dirac zurückgehende Idee, ein klassisches mechanisches System dadurch zu quantisieren, dass man eine lineare Abbildung $Q : A \to \mathcal{A}$ findet, die folgende Eigenschaften hat:

$$Q(\{a_1, a_2\}) = [Q(a_1), Q(a_2)],$$
$$Q(q_i) = x_i \text{ und } Q(p_i) = \partial_i.$$

Unglücklicherweise besagt das Theorem von Groenwold–Van Hove, dass eine solche lineare Abbildung nicht existiert.

Die Deformationsquantisierung (im Sinne von [1]) ist eine mathematische Prozedur, die Diracs Idee der Quantisierung nahe kommt. Man verzichtet dabei zunächst auf Darstellungen der Observablenalgebra $A$ auf Hilberträumen und deformiert stattdessen die kommutative Algebrastruktur auf $A$ mit Hilfe eines Parameters $\hbar$ zu einer assoziativen, aber nichtkommutativen Algebra-Struktur so, dass der Kommutator des deformierten Produkts durch die Poisson Klammer gegeben ist. Diese Deformationsprozedur wird im nächsten Abschnitt näher erläutert.

## 2. Deformationsquantisierung von Poisson Algebren

Die Grundidee der "Deformation" einer mathematischen Struktur ist es, eine (andere) Struktur zu finden, die von einem (kleinen) Parameter $\hbar$ abhängt, und die sich für $\hbar = 0$ zu der ursprünglich gegebenen spezialisiert. So kann man z. B. eine assoziative Algebra $A$ deformieren, indem man die Addition auf $A$ gleich lässt, die Multiplikation $\cdot$ jedoch zu $\star$ deformiert. Dabei ist $a_1 \star a_2$ kein Element von $A$ mehr, sondern eine Potenzreihe $a_1 \cdot a_2 + B_1(a_1, a_2)\hbar + B_2(a_1, a_2)\hbar^2 + \ldots$

in $\hbar$ mit Koeffizienten $B_n(a_1, a_2)$ aus $A$. Die Verknüpfung $\star$ setzt sich dann auf natürliche Weise fort zu einer Verknüpfung auf den Potenzreihen $A_\hbar = A[\![\hbar]\!]$ mit Koeffizienten in $A$. Die Distributivität ist für $A_\hbar$, versehen mit diesem neue Produkt $\star$, gesichert, wenn die Koeffizienten $B_n(\cdot,\cdot)$ bilinear sind. Auch die Bedingung, dass die 1 in $A$ auch das 1-Element in $A_\hbar$ sein soll, ist leicht zu realisieren. Es ist die Assoziativität, die schwer zu kontrollieren ist.

Zwei solche Produkte $\star$, $\tilde{\star}$ nennt man äquivalent, wenn es einen Differentialoperator $D = \sum_{n\geq 0} \hbar^n D_n$, $D_0 = 1$, gibt, so dass für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$D(a_1 \star a_2) = D(a_1) \tilde{\star} D(a_2).$$

Eine Möglichkeit, Deformationen zu studieren, ist es, die Bedingungen, die durch die Gültigkeit der Assoziativität an die Koeffizienten $B_n(\cdot,\cdot)$ gestellt werden, schrittweise in den Potenzen von $\hbar$ zu erfüllen. Das bedeutet, man erfüllt sie erst modulo $\hbar$, dann modulo $\hbar^2$, und so weiter. Dabei bedeutet "modulo $\hbar^n$", dass man in den Gleichungen auf beiden Seiten Terme in $\hbar^{n+1}$ und höheren Potenzen vernachlässigt.

Zunächst betrachtet man Deformationen erster Ordnung, d. h. man eliminiert alle Terme der Ordnung größer oder gleich 2 in $\hbar$. Man bekommt die folgende Bedingung an $B_1(\cdot,\cdot)$:

$$a_1 B_1(a_2, a_3) - B_1(a_1 a_2, a_3) + B_1(a_1, a_2 a_3) - B_1(a_1, a_2) a_3 = 0. \tag{2}$$

Schreibt man $B_1 = B_1^+ + B_1^-$ als Summe seiner symmetrischen und antisymmetrischen Teile, so erhält man für den symmetrischen Teil $B_1^+$ die Gleichung

$$B_1^+(a_1, a_2) = a_1 D(a_2) - D(a_1 a_2) + D(a_1) a_2,$$

wobei $D$ ein Differentialoperator ist (man sagt, dass $B_1^+$ ein Hochschild Korand vom Grad 2 ist). Daraus folgt, dass man (nach Übergang zu einem äquivalent Produkt) annehmen kann, dass $B_1^+ = 0$, also $B_1 = B_1^-$ antisymmetrisch ist. Die Bedingung an $B_1^-$ ist, dass sie eine antisymmetrische Biderivation ist, d. h.

$$B_1^-(a_1, a_2 a_3) = B_1^-(a_1, a_2) a_3 + a_2 B_1^-(a_1, a_3).$$

Deformationen bis zur ersten Ordnung in $\hbar$ werden also bis auf Äquivalenz klassifiziert durch antisymmetrische Biderivationen von $A$. Dies ist eine sogenannte kohomologische Größe: die antisymmetrischen Biderivationen bilden die sogenannte zweite Hochschild Kohomologiegruppe $HH^2(A, A)$ von $A$.

Will man Deformationen modulo $\hbar^n$ zu Deformationen modulo $\hbar^{n+1}$ erweitern, stößt man auf Obstruktionen, die in der dritten Hochschild Kohomologie $HH^3(A, A)$ von $A$ leben. Nach einem Theorem von Hochschild–Kostant–Rosenberg sind ihre Elemente die trilinearen Abbildungen $A \times A \times A \to A$, die total antisymmetrisch und derivativ in jeder Komponente sind. Beispielsweise ist die Obstruktion, eine Deformation erster Ordnung wie oben zu einer Deformation zweiter Ordnung zu erweitern, gegeben durch die linke Seite der Jacobi Identität für $B_1^-$. Mit anderen Worten: die Obstruktion ist genau dann trivial, wenn $B_1^-$ eine Poisson Struktur definiert.

Eine Deformationsquantisierung einer Poisson Algebra $(A, \{\cdot,\cdot\})$ wird in [1] definiert als eine Deformation von $A$, für die $2B_1^-$ gleich der vorgegebenen Poisson Klammer $\{\cdot,\cdot\}$ ist. Nach dem oben Gesagten ist also eine Deformationsquantisierung von $(A, \{\cdot,\cdot\})$ bis zur ersten Ordung eindeutig und bis zur zweiten Ordnung gibt es keine Hindernisse. Aber die Existenz von Deformationen beliebig hoher Ordnung scheint sich so nicht klären zu lassen, denn der Obstruktionsraum $HH^3(A, A)$ ist nicht Null. Es stellt sich dann die Frage, ob die Poisson Algebra $(A, \{\cdot,\cdot\})$ eine Deformationquantisierung besitzt, und, falls ja, wie man eine solche explizit konstruieren kann.

## 3. Die Formel von Kontsevich

In seinem berühmten Artikel [2] beantwortet Kontsevich die obige Frage positiv. Sein Beweis ist konstruktiv. Er gibt für eine beliebige Poisson Algebra $(A = C^\infty(\mathbb{R}^d), \{\cdot,\cdot\})$ eine explizite

Formel für ein Produkt $\star$ an, die im Folgenden beschrieben wird. Dazu schreibt man die Poisson Struktur wie folgt:

$$\{a_1, a_2\} = \sum_{i,j=1}^{d} \pi_{ij}(\partial_i a_1)(\partial_j a_2),\ \pi_{ij} = -\pi_{ji} \in A.$$

3.1. **Graphen und die explizite Integralformel von Kontsevich.** Ein zulässiger Graph $\Gamma$ vom Typ $(n, 2)$ ist ein Graph, bestehend aus Ecken und Kanten, dessen Kanten eine Richtung haben und dessen Ecken einen Typ bekommen. Es soll $n$ Ecken vom ersten Typ und 2 geordnete Ecken $\{1, 2\}$ vom zweiten Typ geben. Weiter fordert man, dass 1.) die Startecke einer Kante immer vom ersten Typ sein soll, dass 2.) aus jeder Ecke vom ersten Typ genau zwei Kanten heraus kommen und dass 3.) $\Gamma$ weder vielfache Kanten noch kurze Schleifen besitzt (d. h. es gibt in $\Gamma$ keine zwei Kanten, die diesselbe Richtung und dieselben Eckpunkte haben, und es gibt keine Kante in $\Gamma$, deren Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen). **Abbildung 1** zeigt, wie ein zulässiger Graph vom Typ $(3, 2)$ aussehen kann:

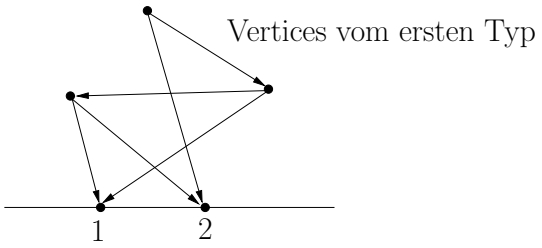


Abbildung 1. Ein zulässiger Graph vom Typ $(3, 2)$.

Man bezeichnet mit $\mathcal{G}_{n,2}$ die Menge aller zulässigen Graphen vom Typ $(n, 2)$.

Zu einem beliebigen zulässigen Graphen $\Gamma$ vom Typ $(n, 2)$ assoziiert man einen sogenannten Bidifferentialoperator $B_\Gamma(\cdot, \cdot)$ wie folgt: Jeder Ecke vom ersten Typ ordnet man eine Kopie der $A$-wertigen $n \times n$-Matrix $\pi_{ij}$ zu, den Ecken 1 und 2 zwei Funktionen $a_1, a_2 \in A$ und den Kanten je eine Derivation $\partial_i$, $i = 1, \ldots, d$. Dann summiert man über alle Indizes. Beispielsweise erhält man für $\Gamma$ wie in **Abbildung 1**

$$B_\Gamma(a_1, a_2) = \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2,k_1,k_2=1}^{d} \pi_{i_1 i_2}(\partial_{i_1}\pi_{j_1 j_2})(\partial_{j_1}\pi_{k_1 k_2})(\partial_{j_2}\partial_{k_1} a_1)(\partial_{i_2}\partial_{k_2} a_2). \tag{3}$$

Ferner assoziiert man zu $\Gamma$ ein sogenanntes Integralgewicht $\varpi_\Gamma$ durch

$$\varpi_\Gamma = \int_{C^+_{n,2}} \omega_\Gamma,\ \omega_\Gamma = \prod_{e \in K(\Gamma)} \omega_e. \tag{4}$$

Dabei wird mit $K(\Gamma)$ die Menge aller Kanten von $\Gamma$ bezeichnet, $C^+_{n,2}$ ist definiert durch

$$C^+_{n,2} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n :\ \mathrm{Im}(z_i) > 0 \text{ und } \ z_i \neq z_j \text{ für } \ i \neq j\},$$

und $\omega_e$ ist eine sogenannte 1-Form:

$$\omega_e = \frac{1}{2\pi} d\arg\left(\frac{z_{e_1} - z_{e_2}}{\overline{z}_{e_1} - z_{e_2}}\right). \tag{5}$$

Hier wird mit $d$ die äußere Ableitung und mit $\arg(\cdot)$ die Argument-Funktion bezeichnet, d. h. für eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten ist $\arg(re^{i\varphi}) = \varphi$. Die Kante $e = (e_1, e_2)$ hat die Ecken $e_1$ und $e_2$, und für eine Ecke vom ersten Typ (durchnummeriert mit $1, 2, \ldots, n$) sei $z_e$ die entsprechende Koordinate $z_i$, für eine Ecke $e \in \{1, 2\}$ vom zweiten Typ sei $z_e = 0$ bzw. $z_e = 1$.

*Bemerkung* 3.1. Geometrisch gesehen ist die 1-Form $\omega(z_1, z_2)$ die äußere Ableitung des (normierten) Winkels $\phi_h(z_1, z_2)$, der in **Abbildung 2** eingezeichnet ist.

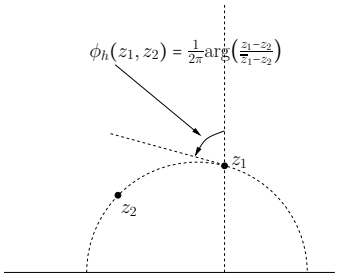


Abbildung 2. Die Winkelfunktion $\phi_h(z_1, z_2)$.

*Bemerkung* 3.2. *A priori* ist es nicht klar, dass die Integrale in Formel (4) konvergieren. Es wurde aber in [2] gezeigt, dass sich die 1-Formen (5) auf eine geeignete Kompaktifizierung $\mathcal{C}^+_{n,2}$ von $C^+_{n,2}$ differenzierbar fortsetzen lassen, so dass die Integrale in (4) automatisch konvergieren. Das entspricht der Tatsache, dass eine auf dem offenen Einheitsintervall definierte stetige Funktion unter Umständen nicht integrierbar sein kann, dagegen eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Einheitsintervall stets integrierbar ist. Die kompaktifizierten Konfigurationsräume $\mathcal{C}^+_{n,2}$ sind Beispiele für differenzierbare, orientierte Mannigfaltigkeiten mit Ecken (d. h. topologische Räumen, die lokal wie $[0,\infty)^p \times \mathbb{R}^q$ aussehen und deren Koordinatenwechsel differenzierbare Abbildungen sind).

Die Formel von Kontsevich [2] für die Deformationsquantisierung von $(C^\infty(\mathbb{R}^d), \{\cdot,\cdot\})$ lautet nun

$$a_1 \star a_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma\in\mathcal{G}_{n,2}} w_\Gamma B_\Gamma(a_1, a_2). \tag{6}$$

Der schwierige Teil in [2] ist der Nachweis der Assoziativität des Produktes (6). Hier spielt eine unendliche Serie von polynomialen Identitäten vom Grad 2 zwischen den Integralgewichten eine wichtige Rolle. Solche polynomiale Identitäten sind eine Konsequenz einer Verallgemeinerung des Satzes von Stokes für orientierte Mannigfaltigkeiten mit Ecken (den man als eine höherdimensionale Version der partiellen Integration ansehen kann).

3.2. **Einige (offene) Probleme.** Es ist eine offene Frage, ob die Integralgewichte rationale oder irrationale Zahlen sind.

Beispielsweise definiert eine endlich dimensionale reelle Lie Algebra $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^d$ auf natürliche Weise eine Poisson Algebra $(\mathrm{S}(\mathfrak{g}), \{\cdot,\cdot\})$, wobei $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ die symmetrische Algebra von $\mathfrak{g}$ ist. Nach Wahl einer Basis $\{x_i\}$ von $\mathfrak{g}$ kann man $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ mit der Algebra $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ der reellen Polynome in $d$ Variablen identifizieren, und die zugehörige Poisson Struktur ist eindeutig durch die Leibniz Regel und die Lie Klammer auf $\mathfrak{g}$ bestimmt.

Die Poisson Algebra $(\mathrm{S}(\mathfrak{g}), \{\cdot,\cdot\})$ besitzt eine Deformationsquantisierung, die ein wohlbekanntes Objekt ist, nämlich die sogenannte universelle einhüllende Algebra $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$. Diese ist eine assoziative Algebra über $\mathbb{R}$ mit Generatoren $\{x_i\}$ und Relationen

$$x_i \cdot x_j - x_j \cdot x_i = [x_i, x_j],$$

wobei $\cdot$ das Produkt in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ bezeichnet und $[\cdot,\cdot]$ die Lie Klammer ist. Insbesondere ist $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ nichtkommutativ, solange die Lie Klammer nicht identisch 0 ist.

In der Arbeit [3] (von der ein Teil am MPIM entstanden ist) wird im Detail und durch rein algebraische Argumente (im Gegensatz zu den Argumenten in [2]) bewiesen, dass die Deformationsquantisierung $(\mathrm{S}(\mathfrak{g}), \star)$, gegeben durch die Formel (6), äquivalent zu $(\mathrm{U}(\mathfrak{g}), \cdot)$ ist. Die Äquivalenz wird hergestellt durch den Differentialoperator $\mathrm{Duf}(\cdot)$ auf $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, der durch die Formel

$$\mathrm{Duf}(\cdot) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(\cdot)) + \sum_{n\geq 1} w_{2n}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}^{2n}(\cdot))\right), \tag{7}$$

gegeben ist, wobei $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$ (für $x$, $y$ in $\mathfrak{g}$) die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}$ bezeichnet, und $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\cdot)$ die Spur von linearen Selbstabbildungen von $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Die numerischen Koeffizienten $w_{2n}$ sind rationale Zahlen und sind spezielle Integralgewichte wie in (4).

*Bemerkung* 3.3. In der Deformationsquantisierung *à la* Kontsevich von $(\mathrm{S}(\mathfrak{g}), \{\cdot,\cdot\})$ ist die Formel für das $\star$-Produkt tatsächlich polynomial in $\hbar$, so dass man problemlos in der Formel (6) $\hbar = 1$ setzen darf: das wurde implizit oben getan.

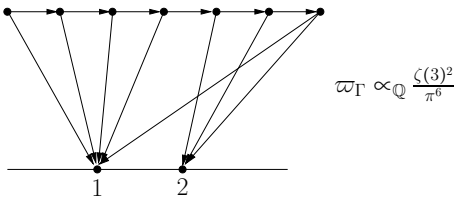


Abbildung 3. Der Graph, dessen Gewicht in [4] bis auf rationale Terme berechnet wurde.

Ein spezielles Integralgewicht, das in der Formel (6) für $(\mathrm{S}(\mathfrak{g}), \{\cdot,\cdot\})$ auftritt und dessen Graph in **Abbildung 3** gezeigt wird, wurde explizit in [4] berechnet: Das Resultat ist, dass $\varpi_\Gamma$ bis auf Addition und Multiplikation mit rationalen Zahlen gleich $\zeta(3)^2/\pi^6$ ist, in Symbolen $\varpi_\Gamma \propto_{\mathbb{Q}} \zeta(3)^2/\pi^6$. Dabei ist $\zeta(\cdot)$ die Riemannsche $\zeta$-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Obwohl es schon seit langem bekannt ist, dass $\zeta(3)$ keine rationale Zahl ist, ist es ein noch offenes Problem, ob $\zeta(3)/\pi^3$ rational oder irrational ist. Eine positive Antwort zur Rationalität der Integralgewichte hätte zur Folge, dass das Quadrat von $\zeta(3)/\pi^3$ rational wäre. Vermutlich würde die Rationalität der Integralgewichte implizieren, dass viele spezielle Zahlen, die man durch die Riemannsche $\zeta$-Funktion ausdrücken kann, algebraisch sind (also die Nullstellen von Polynomen mit rationalen Koeffizienten).

Ferner wurde in [5] schon (ohne Beweis!) behauptet, dass man in der Formel für die Integralgewichte (4) die 1-Form $\omega_e$ in (5) durch die 1-Form

$$\omega_e^{\log} = \frac{1}{2\pi i} d\log\left(\frac{z_{e_1} - z_{e_2}}{\overline{z}_{e_1} - z_{e_2}}\right) \tag{8}$$

ersetzen darf und daraus auch eine Deformationsquantisierung $\star_{\log}$ von $(C^\infty(\mathbb{R}^d), \{\cdot,\cdot\})$ erhält.

Diese zwei Behauptungen kann man leider nicht mit denselben Techniken wie in [2] beweisen, weil die 1-Form (8) einen Pol 1. Ordnung besitzt, wenn sich die zwei Argumente $z_{e_1}$ und $z_{e_2}$ nähern, d. h. die 1-Form (8) hat eine Singularität vom Typ

$$\omega_e^{\log} = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz_{e_1} - dz_{e_2}}{z_{e_1} - z_{e_2}} + \text{reguläre Terme}.$$

Im Gegensatz zur 1-Form (5) lässt sich die 1-Form (8) daher nicht differenzierbar auf die Kompaktifizierung $\mathcal{C}^+_{n,2}$ fortsetzen. Deshalb ist es *a priori* nicht klar, ob die Integralgewichte $\varpi_\Gamma^{\log}$ existieren. Ferner ist der Satz von Stokes für glatte Mannigfaltigkeiten mit Ecken in dieser Situation wegen der Singularität der 1-Form (8) nicht anwendbar, was eine allgemeinere Version des Satzes von Stokes erfordert.

A. Alekseev (Genf), J. Löffler (IMPRS, MPIM Bonn), C. A. Rossi (MPIM Bonn) und C. Torossian (Paris) haben vor kurzem diese zwei Behauptungen vollständig bewiesen: Insbesondere ist das Kernstück des Beweises ein allgemeinerer Satz von Stokes für Mannigfaltigkeiten mit Ecken und für Integranden mit milden Singularitäten, aus dem die Assoziativität des Produktes $\star_{\log}$ folgt.

Dieses Resultat ist insbesondere im Fall der Poisson Algebra $(\mathrm{S}(\mathfrak{g}), \{\cdot,\cdot\})$ für eine endlichdimensionale Lie Algebra $\mathfrak{g}$ wie oben interessant: Im Rahmen der Lie Algebra Theorie liegt die

Vermutung nahe, dass das entsprechende Produkt $\star_{\log}$ äquivalent zum Produkt $\cdot$ in $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ ist und die Äquivalenz durch den Differentialoperator

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(\cdot)) + \sum_{n\geq 1} w_n^{\log}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}^n(\cdot))\right)$$

vermittelt wird, wobei jetzt die Koeffizienten $w_n^{\log}$ proportional zu $\zeta(n)/(2\pi i)^n$ sind (man bemerke, dass jetzt nicht nur gerade Terme $w_{2n}$ in der Formel erscheinen). Da $w_{2n}^{\log} = w_{2n}$, würde daraus folgen, dass die zwei Produkte $\star$ und $\star_{\log}$ mittels des Differentialoperators

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} w_{2n+1}^{\log}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}^{2n+1}(\cdot))\right)$$

äquivalent sind.

## Literatur


[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures*, Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 61–110. MR0496157 (58 #14737a)

[2] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216. MR2062626 (2005i:53122)

[3] Damien Calaque, Giovanni Felder, and Carlo A. Rossi, *Deformation quantization with generators and relations*, J. Algebra **337** (2011), 1–12, DOI 10.1016/j.jalgebra.2011.03.037. MR2796061

[4] Giovanni Felder and Thomas Willwacher, *On the (ir)rationality of Kontsevich weights*, Int. Math. Res. Not. IMRN **4** (2010), 701–716. MR2595009 (2011g:53199)

[5] Maxim Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys. **48** (1999), no. 1, 35–72, DOI 10.1023/A:1007555725247. Moshé Flato (1937–1998). MR1718044 (2000j:53119)