REKURRENZRELATIONEN UND DYNAMISCH OPTIMALE BILLARDTISCHE

MARTIN MÖLLER

Als Fibonacci im 13. Jh Kaninchenpopulationen studierte, entdeckte er sukzessive Populationsgrößen von $2,3,5,8,13,21,\ldots$ Kaninchen und sodann die heutzutage weit bekannte Beziehung

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{mit den Startwerten} \quad F_0 = 2, F_1 = 3.$$

Eine solche Beziehung zwischen Folgegliedern, bei der das n-te Folgenglied aus einer festen Anzahl von vorherigen Folgegliedern – hier zweien – bestimmt ist, nennt man Rekurrenzrelation. Üblicherweise fordert man darüber hinaus, dass das n-te Folgenglied als Summe mit gewissen Vorkoeffizienten aus den vorigen Folgegliedern hervorgeht. In der obigen Rekurrenzrelation sind diese Koeffizienten beide gleich Eins, also insbesondere ganze Zahlen, und so sind auch die Populationsgrößen ganze Zahlen. Dies ist vom biologischen Standpunkt sicher eine natürliche Forderung.

Das Verhalten der Folgeglieder einer Rekurrenz zeigt manchmal erstaunliche Eigenschaften, die sich erst aus der Herkunft der Rekurrenz aus einem anderen Gebiet der Mathematik erklären lassen. Ein Beispiel dafür ist die Rekurrenz

$$G_n = \frac{(34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)}{n^3} G_{n-1} - \frac{(n-1)^3}{n^3} G_{n-2} \tag{1}$$

deren Ursprung weiter unter erläutert wird. Sie ist von wesentlich anderer Bauart als die Rekurrenz für F_n. Da man bei jedem Schritt durch n^3 dividiert, ist es naheliegend anzunehmen, dass bald große Nenner auftreten. Beginnt man mit den Startwerten $G_0 = 1$ und $G_1 = 5$, so erhält man $G_2 = 73$, $G_3 = 1445$, $G_4 = 33001, \ldots$. Keine Nenner weit und breit! Wieso sich Mathematiker und Physiker für solche Ganzzahligkeitseigenschaften interessieren, kann man anhand der Riemannschen Zetafunktion und Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten beispielhaft darlegen.

Um die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ranken sich seit Langem ungelöste Vermutungen. Eine ist die Frage nach den Nullstellen, die andere ist die Frage, ob die Funktionswerte an den ungeraden natürlichen Zahlen rational oder irrational sind.

1978 verblüffte R. Apéry seine Zuhörer in Marseille mit einer Reihe forscher Behauptungen:

i) Für alle n ist Folge G_n ohne Nenner!
ii) Bezeichnet man mit „Dächern“ die Folge mit der gleichen Rekurrenz (1) und den Startwerten $\hat{G}_0 = 0$ und $\hat{G}_1 = 6$, so haben die Folgenglieder nur sehr kleine Nenner!
iii) Die Quotientenfolge $\hat{G}_n / G_n$ konvergiert gegen $\zeta(3)$!
Schließlich:
iv) Die Konvergenz ist so schnell, dass $\zeta(3)$ keine rationale Zahl ist!

Er konnte jedoch seine Beweise nur unzureichend darstellen und es herrschte große Skepsis, ob er ein lange offenes Problem tatsächlich gelöst hatte. In den Monaten danach gelang es durch

die Arbeit von H. Cohen und D. Zagier (am Max-Planck-Institut für Mathematik, MPIM Bonn), die Behauptungen zu einem Beweis zu vervollständigen. D. Zagier nahm dies zum Anlass mit Computerhilfe zu suchen, welche Rekurrenzrelationen nur ganzzahlige Werte haben. Er testete 10^8 Rekurrenzrelationen von ähnlicher Gestalt wie G_n und fand nur 8 Fälle, in denen die Folgeglieder ganzzahlig waren. Alle stammen aus der Geometrie, wie weiter unten noch erläutert wird.

Im Zusammenhang mit Stringtheorie und Spiegelsymmetrie haben Physiker Interesse für Calabi-Yau (CY) Mannigfaltigkeiten entwickelt (siehe S. Roan im Jahrbuch 1993). Genauer gesagt, studieren sie CY-Mannigfaltigkeiten nicht einzeln, sondern in einer Familie, d. h. in einer Schar, die von einem komplexen Parameter abhängt. Es ist aber nicht leicht, Familien von CY-Mannigfaltigkeiten zu konstruieren, die das von der Physik geforderte Verhalten haben. Daher entstand das Bestreben, zunächst nach Rekurrenzbeziehungen Ausschau zu halten, deren Folgeglieder Ganzzahligkeitseigenschaften haben und die potentiell von Familien von CY-Mannigfaltigkeiten stammen. Tabellen solcher Rekurrenzen wurden von G. Almquist, D. van Straten und W. Zudilin und anderen erstellt. Die Existenz und Konstruktion der zugehörigen CY-Familien bleibt aber derzeit zumeist noch eine offene Frage.

Es gibt noch andere Strukturen, die den Begriff der ganzen Zahlen verallgemeinern. In $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \{a+b\sqrt{D}, a, b \in \mathbb{Q}\}$, einem quadratischen Zahlkörper, bilden die Körperelemente, bei denen a und b ganzzahlig sind, solch einen Ganzzahlring. Eigentlich sollte man für $D \equiv 1 \mod 4$ noch einen Nenner 2 zulassen, aber auf die Sonderrolle der Zwei wird im Folgenden nicht eingegangen. Anlass dieses Berichts sind jüngst endeckte Rekurrenzrelationen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ mit überraschenden Ganzzahligkeitseigenschaften. Ein Beispiel hierfür ist

$$\begin{aligned} H_n = {} & \frac{(639-217\sqrt{17})n^2+(-511+217\sqrt{17})n+(100-60\sqrt{17})}{4n^2} H_{n-1} \\ & + \frac{(14320-3472\sqrt{17})n^2+(-35800+8680\sqrt{17})n+(22375-5425\sqrt{17})}{n^2} H_{n-2}. \end{aligned}$$

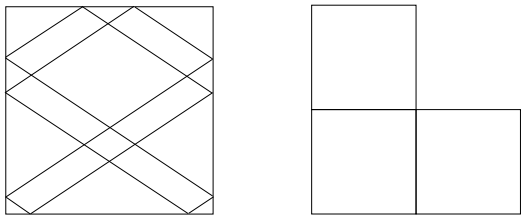
Startet man nun mit $H_0 = 0$ und $H_1 = 1$, so sind die weiteren Folgenglieder

$$H_2 = 57-15\sqrt{17}, \quad H_3 = 15708-3780\sqrt{17}, \quad H_4 = 4894274-1188110\sqrt{17}, \ldots$$

ganze Zahlen. Interessanter als die Zahlenspielerei selbst ist vielleicht der Ursprung dieser Rekurrenzrelation. Sie und der Beweis der Ganzzahligkeit stammt wiederum aus der Geometrie, genauer gesagt von Billardtischen.

Betrachtet man die Trajektorien einer Billardkugel auf einem rechteckigen Tisch, so hängt es nur von der Richtung, nicht aber vom Startpunkt ab, wie sie sich langfristig verhalten. Entweder die Trajektorien sind periodisch wie in **Abbildung 1(a)**, oder sie kommen jedem Punkt auf dem Billardtisch beliebig nahe und das in gleichförmiger Weise. Den für Billardspieler wichtigen Fall, genau die Ecke zu treffen, kann der Mathematiker dabei getrost vernachlässigen.

Nimmt man statt eines Rechtecks einen anders geformten, aber dennoch polygonalen Billardtisch, so findet man mit ziemlicher Sicherheit auch anderes Trajektorienverhalten. Das heißt, man findet Richtungen, in denen die Trajektorien nicht periodisch sind, aber auch nicht allen Punkten des Tisches nahe kommen. Man sagt daher, dass rechteckige Billardtische *dynamisch optimal* sind. Wie gesagt, eine optimale Dynamik ist sehr selten. Sicher, klebt man gleich große rechteckige Tische zusammen wie in **Abbildung 1(b)**, so erhält man nichts wesentlich Neues. Der so entstandene Billardtisch ist wieder dynamisch optimal. Auch die Menge der Richtungen mit periodischem Trajektorienverhalten bleibt dabei unverändert. Es war eine überraschende Entdeckung

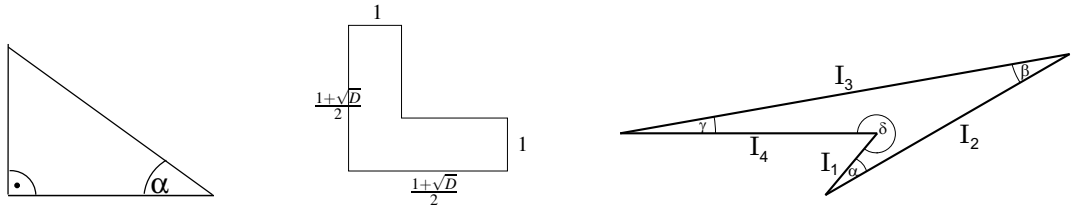


(a) (b)

ABBILDUNG 1. Eine periodische Bahn und ein dynamisch optimaler Tisch (durch Aneinanderkleben von rechteckigen Tischen).

von Veech im Jahre 1989, dass die rechtwinkligen Dreiecke mit $\alpha = \pi/n$ (**Abb. 2(a)**) auch dynamisch optimal sind – und von Rechtecken wesentlich verschieden. Das kann man zum Beispiel daran erkennen, dass die Menge der Steigungen mit periodischen Trajektorien hier arithmetisch anders als bei rechteckigen Billardtischen ist.

Auch die L-förmigen Tische in **Abbildung 2(b)** für alle ganzen Zahlen D sind dynamisch optimal. Ebenso dynamisch optimal ist der schiefe Pfeil in **Abbildung 2(c)**, wobei $\alpha = \beta = \pi/n$, $\gamma = \pi/2n$ für beliebiges n und die Seitenlängen I_k geeignet gewählt sein müssen. Die L-förmigen Tische wurden von K. Calta und C. McMullen unabhängig 2003 gefunden, die Pfeile sind Teil einer Serie von I. Bouw und M. Möller (MPIM) aus dem Jahr 2006.



(a) (b) (c)

ABBILDUNG 2. Dynamisch optimale Billardtische.

Um die Verbindung zwischen den angesprochenen Themen Rekurrenzrelationen und Billardtische herzustellen, bedarf es einiger Zwischenschritte. Man kann einen polygonalen Billardtisch sukzessive an den Kanten reflektieren und diese Kopien entlang der Reflexionskanten verkleben. Sind die Winkel des Polygons zudem rationale Vielfache von π, erhält man nach endlich vielen Reflexionen wieder den ursprünglichen Tisch. Man erhält so eine Fläche, ähnlich der Oberfläche eines Fahrradschlauchs oder einer Brezel, mit der Zusatzinformation, dass die Oberfläche aus flachen Stücken zusammengesetzt ist. Diese „Entfaltungsflächen“ von Billardtischen werden flache Riemannsche Flächen genannt. Billardtrajektorien werden auf der Entfaltungsfläche zu Geraden und man kann deren Langzeitverhalten dort leichter begreifen. Die Menge aller flachen Riemannschen Flächen fasst man in einem „Modulraum“ zusammen, einer Mannigfaltigkeit, deren Punkte eineindeutig den flachen Riemannschen Flächen entsprechen.

Die Gruppe der linearen Abbildungen der Ebene $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ wirkt auf der Menge der Polygone in der Ebene. Dies fortsetzend erhält man eine Wirkung der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf der Menge aller flachen Flächen, präziser gesprochen auf dem Modulraum der flachen Flächen. Es ist sehr naheliegend, alle Entfaltungsflächen, die durch lineare Transformationen ineinander übergehen, gleichzeitig zu betrachten: Falls die Dynamik auf einer Entfaltungsfläche optimal ist, so ist die Dynamik auf jeder Fläche in der Bahn unter der Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ optimal.

Vergisst man das Zusatzdatum der flachen Einbettung, so gibt die Bahn einer dynamisch optimalen Entfaltungsfläche unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine algebraische Kurve im Modulraum für Riemannsche Flächen. Per Konstruktion ist diese Kurve eine Geodätische für eine natürliche Metrik auf dem Modulraum, die Teichmüllermetrik. Man nennt diese Kurven daher *Teichmüllerkurven*.

Die Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf der Menge der flachen Flächen hat viele interessante Teilaspekte. Einer davon, das Langzeitverhalten von Trajektorien auf einer sehr allgemeinen flachen Riemannschen Fläche, wurde von A. Zorich im Jahrbuch 2003 behandelt. Das andere Extrem ist die Klassifikation von sehr speziellen, nämlich dynamisch optimalen Tischen bzw. von Teichmüllerkurven. C. McMullen hat jüngst alle Teichmüllerkurven klassifiziert, die aus flachen Riemannschen Flächen vom Geschlecht zwei entstehen. Das heißt, die von der Teichmüllerkurve parametrisierten flachen Riemannschen Flächen sind topologisch eine Kugel mit zwei Henkeln. Diese Klassifikation verwendet eine algebraische Charakerisierung von Teichmüllerkurven von M. Möller. Flächen vom Geschlecht drei – also mit drei Henkeln – verhalten sich in vielerlei Hinsicht anders als die vom Geschlecht zwei. Dies reflektiert auch, dass über quadratische Zahlkörper, die oben genannten Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, viel bekannt ist, über kubische Zahlkörper hingegen viele analoge Aussagen falsch oder unbekannt sind.

Mittels des Begriffs von Teichmüllerkurven kann man nun den Zusammenhang zwischen Billardtischen und der Lösung H_n der obigen Rekurrenzrelation skizzieren. Man studiert, wie sich gewisse Integralfunktionen auf der Entfaltungsfläche verändern, wenn man sich im Parameterraum für die Entfaltungsflächen bewegt. Genauer gesagt, ist man an der Bewegung entlang der Teichmüllerkurve interessiert. Man erhält auf diese Weise eine Differentialgleichung für die Integralfunktion und kann diese Differentialgleichung mittels einer Potenzreihe lösen. Die Koeffizienten der Potenzreihe genügen dann immer einer Rekurrenzrelation. Ein Beispiel dafür ist der L-förmige Tisch aus **Abbildung 2(b)** mit $D = 17$, welcher die Rekurrenzrelation H_n ergibt.

Y. André hat gezeigt, dass bei solchen Differentialgleichungen geometrischen Ursprungs die Nenner der Folgeglieder nicht allzu schnell wachsen. Wann sie jedoch ganzzahlig sind – so wie bei Apérys Beispiel, bei manchen Familien von CY-Mannigfaltigkeiten oder bei Teichmüllerkurven – ist derzeit nicht bekannt.

Für die Ganzzahligkeit der Folgeglieder G_n fand F. Beukers eine geometrische Erklärung. Für den Leser, der sich tiefer mit der Materie auseinandersetzen möchte, sei hier zum Einen erwähnt, dass G_n die Koeffizienten einer Modulform für eine Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sind. Zum Anderen sei angedeutet, dass es zwei Beweise der Ganzzahligkeit von H_n gibt: Der eine (I. Bouw und M. Möller) verwendet p-adische Methoden, der andere (M. Möller und D. Zagier) verwendet Einschränkungen von Hilbertschen Modulformen. Er dient als Grundlage für die Untersuchung einer neuen Art von Modulformen, die man vielleicht „Teichmüllermodulformen“ nennen sollte.

Abschließend könnte man spekulieren, ob alle Rekurrenzrelationen mit erstaunlichem Ganzzahligkeitsverhalten geometrischen Ursprungs sind. Der Autor möchte dahingehend jedoch keine Prognose wagen.