Offene Bücher und ihre Anwendungen

Vogel, Thomas

Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn

Korrespondierender Autor
E-Mail: tvogel@mpim-bonn.mpg.de

Zusammenfassung
Offene Bücher sind Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten, die zum Beispiel für die Konstruktion von Blätterungen geeignet sind. Wichtige neue Anwendungen haben Zerlegungen in offene Bücher in der Theorie der Kontaktstrukturen gefunden.

Abstract
Open books are particular decompositions of manifolds which are useful for the construction of foliations. There are also important applications to the theory of contact structures.

1. Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeiten sind zentrale Objekte der Differentialgeometrie. Eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Punktmenge, so dass jeder Punkt eine Umgebung hat, die zu einer Linie äquivalent ist. Bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten sind die Umgebungen äquivalent zu Ebenen. Im Fall einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit braucht man n Koordinaten, um Umgebungen von Punkten zu beschreiben.
Zum Beispiel ist der Kreis bzw. die Oberfläche der Erde eine ein- bzw. zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Insbesondere folgt aus der Tatsache, dass jeder Punkt einer Mannigfaltigkeit eine Umgebung hat, die äquivalent zu einer Ebene (etwa einer Landkarte) ist, nicht, dass die ganze Mannigfaltigkeit (die Erdoberfläche) eine Ebene ist.
Um neue Mannigfaltigkeiten zu finden, kann man das Produkt $M \times N$ zweier Mannigfaltigkeiten M, N bilden. Die Punkte von $M \times N$ sind Paare aus einem Punkt auf M und einem Punkt auf N. Wenn M und N Mannigfaltigkeiten der Dimension p und q sind, so kann man die Umgebung von Punktepaaren durch $p + q$ Koordinaten beschreiben. Also ist $M \times N$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $p + q$.
Zum Beispiel ist der Torus (die Oberfläche eines Fahrradschlauches in **Abbildung 1**) äquivalent zum Produkt zweier Kreise. Dagegen ist die Sphäre (die Erdoberfläche) nicht äquivalent zu einem Produkt von Räumen niedrigerer Dimension.
Natürlich kann man nicht erwarten, dass eine zufällig gewählte Mannigfaltigkeit äquivalent zu einem Produkt ist. Faserungen sind eine natürliche Verallgemeinerung von Produkten. Um eine Faserung zu konstruieren, bildet man das Produkt eines Balles mit einer festen Mannigfaltigkeit (der Faser) und verklebt mehrere Kopien davon miteinander, und zwar so, dass die Fasern zusammenpassen.

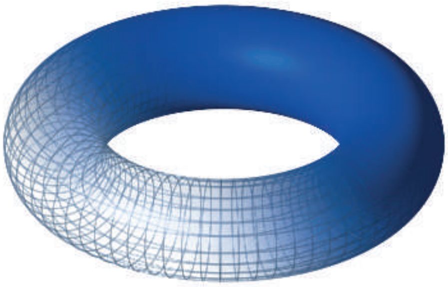

Abb. 1: *Torus*

Quelle: http://de.wikipedia.org,
Diese Bild- oder Mediendatei wurde von ihrem Urheber zur uneingeschränkten Nutzung freigegeben.
Diese Datei ist damit gemeinfrei (public domain). Dies gilt weltweit.

Genauer gesagt ist eine Faserung mit Faser F einer Mannigfaltigkeit M gegeben durch eine Basismannigfaltigkeit B sowie eine Abbildung p von M nach B mit folgender Eigenschaft: Für jeden Ball D in B ist das Urbild $p^{-1}(D)$ äquivalent zu dem Produkt $D \times F$. Wenn man $p^{-1}(D)$ auf diese Weise schreibt, so entspricht der Abbildung p gerade die Projektion auf den ersten Faktor. Die Dimension von M ist die Summe der Dimensionen von Faser und Basis.
Wenn B und F Mannigfaltigkeiten sind, so ist ihr Produkt $M = B \times F$ eine Faserung mit Basis B: Man definiert p durch $p(b, f) = b$ für Punkte (b, f) in $B \times F$. Produkte liefern also Beispiele für Faserungen.
Ein interessanteres Beispiel für eine Faserung ist das Möbiusband. Das Möbiusband M erhält man, wenn man bei einem Papierstreifen (äquivalent zum Produkt $[0, 1]\ \ [-1, 1]$ von zwei Intervallen) zwei gegenüberliegende Kanten ($\{0\}[-1, 1]$ und $\{1\}[-1, 1]$) verklebt, und zwar so, dass man bei einer der Kanten oben und unten vertauscht (der Punkt $(0, t)$ wird mit dem Punkt $(1,-t)$ identifiziert).
Das Ergebnis ist in **Abbildung 2** dargestellt.

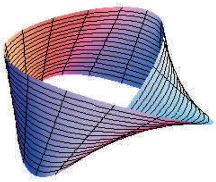

Abb. 2: *Möbiusband*

Erzeugt vom Autor mit Wolfram Mathematica 7

Um diese Faserung vollständig zu beschreiben, muss man die Basis B und die Abbildung p angeben. Wenn man beim Intervall $[0, 1]$ die beiden Endpunkte identifiziert, so erhält man einen Kreis und die Abbildung p ist gegeben durch $p(x, y) = x$, wobei $(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ einem Punkt in M entspricht. Das Möbiusband kann man also als Faserung über einem Kreis darstellen, die Fasern sind Intervalle. Da der Rand des Möbiusbandes aus genau einem Kreis besteht, ist das Möbiusband nicht äquivalent zum Produkt von einem Kreis mit einem Intervall (der Rand dieses Produkts besteht aus zwei Kreisen).
Mannigfaltigkeiten, die sich als Faserungen darstellen lassen, sind immer noch sehr speziell. Eine größere Klasse von Mannigfaltigkeiten lässt sich in ein offenes Buch zerlegen. Grob gesprochen bedeutet dies, dass eine Mannigfaltigkeit M eine Faserung ist, nachdem man einen kleinen Teil entfernt.

Genauer verlangt man, dass es in M einen randlosen Unterraum K gibt, so dass $M - K$ eine Faserung ist, wobei man unter anderem fordert, dass die Basis ein Kreis ist und dass die Dimension von M um zwei größer ist als die Dimension von K.
Zum Beispiel kann man die Oberfläche eines Globus als offenes Buch darstellen, s. **Abbildung 3**. Dazu wählt man für K die beiden Punkte, die dem Nord- und dem Südpol entsprechen. Die Basis B kann man sich in diesem Beispiel als Äquator denken. Jedem Punkt auf dem Globus (außer dem Nord- und dem Südpol) ordnet man den Schnittpunkt vom Längenhalbkreis durch p mit dem Äquator zu.

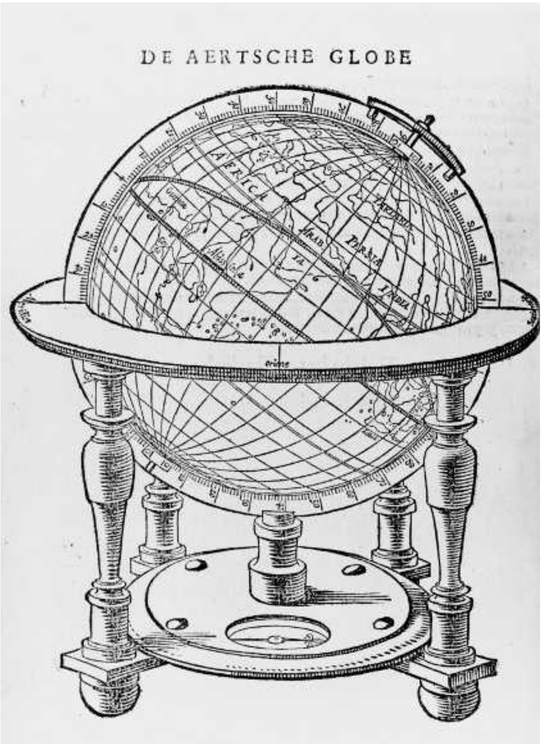

Abb. 3: *Globus von Emery Molyneux, nach Robert Hues (1623)*

Public domain: Diese Bild- oder Mediendatei ist gemeinfrei, weil ihre urheberrechtliche Schutzfrist abgelaufen ist. Dies gilt für die Europäische Union, die Vereinigten Staaten, Australien und alle weiteren Staaten mit einer gesetzlichen Schutzfrist von 70 Jahren nach dem Tod des Urhebers.
Quelle: http://de.wikipedia.org

Damit Zerlegungen in offene Bücher nützlich sein können, muss man noch festlegen, wie die Fasern von $p : M - K \rightarrow S^1$ auf einer Umgebung von K aussehen sollen. Für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten fordert man, dass die Fasern radial von Punkten in K wegzeigen, genauso wie die Längenhalbkreise bei Nord- und Südpol. In Dimension 3 sind die Fasern Flächen, also zweidimensionale Mannigfaltigkeiten und K ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension eins. Man verlangt hier, dass die Fasern sich an Stücke von K so anschließen, wie die Seiten eines aufgeschlagenen Buches an den Buchrücken (s. **Abbildung 4**). Allerdings werden die beiden Buchdeckel miteinander verklebt, und im Gegensatz zu einem wirklichen Buchrücken ist K eindimensional.
Dies erklärt auch die Bezeichnung *offenes Buch*. Entsprechende Bezeichnungen verwendet man in allen Dimensionen: K ist der Buchrücken und die Fasern von p sind die Seiten und die Seiten stoßen aus allen Richtungen an den Buchrücken.

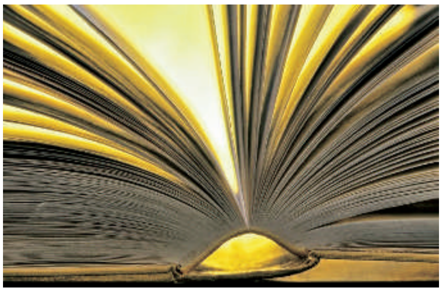

Abb. 4: *Aufgeschlagenes Buch*

Titel: offenes Buch, Fotograf: Singa, Lizenz: CC-Lizenz (BY 2.0)
http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/de/deed.de
Quelle: www.piqs.de

Die Sphäre, also die Oberfläche eines Globus, ist die einzige Fläche, die als offenes Buch dargestellt werden kann. Es scheint also, dass diese Mannigfaltigkeiten immer noch sehr speziell sind. Aber tatsächlich ist diese Klasse von Mannigfaltigkeiten sehr groß: Zum Beispiel gehören alle Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension in diese Kategorie. Dieses Ergebnis geht auf F. Quinn zurück, den besonders wichtigen Fall dreidimensionaler Räume hat J. Alexander etwa 1930 behandelt. Im Gegensatz dazu ist bekannt, dass nicht jede Mannigfaltigkeit gerader Dimension eine Zerlegung als offenes Buch zulässt. Allerdings ist der Fall gerader Dimension ≥ 6 gut verstanden. Weitgehend offen ist der notorisch widerspenstige Fall der Dimension 4.

2. Anwendungen

Zerlegungen von Mannigfaltigkeiten als offene Bücher kann man verwenden, um explizit geometrische Strukturen zu konstruieren. Diese Methode war besonderes erfolgreich bei Blätterungen und bei Kontaktstrukturen. Zusammen mit V. Colin (Univ. Nantes) und F. Presas (Univ. Auton. de Madrid) hat T. Vogel (MPI für Mathematik) offene Bücher für die Konstruktion von Engelstrukturen verwendet. Engelstrukturen sind Ebenenfelder auf vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten, die eng mit Kontaktstrukturen verwandt sind. Wegen der größeren Anschaulichkeit werden im Folgenden aber nur die Anwendungen offener Bücher auf Blätterungen und Kontaktstrukturen in Dimension 3 dargestellt.

2.1. Konstruktion von Blätterungen

Unter einer Blätterung auf M versteht man die Zerlegung einer Mannigfaltigkeit in Mannigfaltigkeiten (die Blätter) deren gemeinsame Dimension um eins niedriger ist als die der Mannigfaltigkeit. Von den Blättern verlangt man, dass sie M ganz ausfüllen und dass sich verschiedene Blätter niemals schneiden. Ein einfaches Beispiel für eine Blätterung auf dem Torus erhält man aus der Zerlegung des Torus als Produkt zweier Kreise: Jede der beiden Familien von Kreisen in Abbildung 1 liefert eine Blätterung.
Wenn eine gegebene Mannigfaltigkeit M eine Faserung zulässt, deren Basis eindimensional ist, so sind die Fasern auch Blätter einer Blätterung. Also trägt das Möbiusband eine offensichtliche Blätterung, deren Blätter jeweils Intervalle sind. Betrachtet man die obige Konstruktion des Möbiusbandes genauer, so erhält man auch eine recht einfache Blätterung, so dass alle Blätter Kreise sind.
Lässt sich eine Mannigfaltigkeit als offenes Buch darstellen, so hat man außerhalb des Buchrückens

schon eine Blätterung konstruiert. Als Blätter nimmt man die Seiten des offenen Buches. Wenn M dreidimensional ist, kann man eine Blätterung auf ganz M konstruieren:
Dazu entfernt man dünne Zylinder entlang des Buchrückens. Der Rand des Restes besteht aus einem oder mehreren Tori und die Seiten des offenen Buches stoßen vertikal an den Rand. Man hat also eine Blätterung auf dem Komplement der Vollzylinder. Um eine Blätterung auf ganz M zu erhalten, kann man, bildlich gesprochen, die Seiten nun um die Randtori wickeln (wie eine Rolle Alufolie). Dabei erhält man eine Blätterung außerhalb der Zylinder, wobei die Randtori Blätter der Blätterung sind. Um eine Blätterung auf ganz M zu konstruieren, muss man nun das Innere der Zylinder mit Blättern füllen, und zwar so, dass sich die Blätter an den Rand des Zylinder anschmiegen. Ein Beispiel einer solchen Blätterung auf einer Hälfte des Zylinders zeigt **Abbildung 5**.
Insgesamt zeigt dies, dass es auf jeder dreidimensionalen Mannigfaltigkeit eine Blätterung gibt. Auch auf höherdimensionalen Räumen kann man Blätterungen mit Hilfe offener Bücher konstruieren.

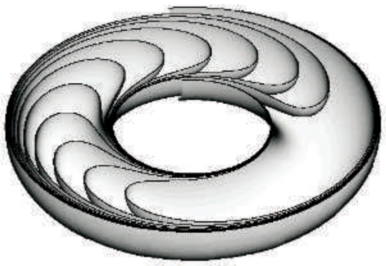

Abb. 5: *Blätterung, die einen Zylinder füllt.*

Some leaves in the half Reeb component
Quelle: http://faculty.ms.utokyo.ac.jp/users/showroom/animations/foliations.html
Used with kind permission of Takashi Tsuboi

2.2. Konstruktion und Klassifikation von Kontaktstrukturen

Zu jeder Blätterung einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit gehört ein Ebenenfeld: An jedem Punkt von M nimmt man die Ebene, die tangential an das Blatt durch den Punkt ist. Die Tatsache, dass dieses Ebenenfeld von einer Blätterung stammt, führt dazu, dass eine geeignet definierte Krümmung des Ebenenfeldes überall verschwindet.
In einem gewissen Sinn sind Kontaktstrukturen das Gegenteil von Blätterungen: Es handelt sich um Ebenenfelder auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, deren Krümmung nirgendwo verschwindet. Kontaktstrukturen spielen eine wichtige Rolle in der klassischen Mechanik bzw. der symplektischen Geometrie, aber auch in der Theorie holomorpher Funktionen mehrerer Veränderlicher.
Kontaktstrukturen sind erstaunlich stabil unter Variationen des Ebenenfelds: Stört man eine Kontaktstruktur ein wenig, so erhält man wieder eine Kontaktstruktur und beide Kontaktstrukturen sind äquivalent. Die Frage von S. Chern nach einer Klassifikation von Kontaktstrukturen bis auf Äquivalenz auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit ist daher sinnvoll.
J. Martinet hat 1971 gezeigt, dass es auf jeder dreidimensionalen Mannigfaltigkeit eine Kontaktstruktur gibt. Seitdem sind zahlreiche weitere Konstruktionen entwickelt worden. Als besonders wichtig hat sich eine Konstruktion von W. Thurston und H. Winkelnkemper (1975) mit Hilfe offener Bücher herausgestellt.
Diese Konstruktion ist deshalb so wichtig, weil E. Giroux 2001 beweisen konnte, dass man jede Kontaktstruktur mit Hilfe eines offenen Buches erhält. Weiter konnte er ein Kriterium angeben, wann zwei offene Bücher äquivalente Kontaktstrukturen liefern. Diese Ergebnisse haben zu weitreichenden Fortschritten in der Theorie der Kontaktstrukturen geführt und haben auch Anwendungen in der niedrigdimensionalen Topologie.