“MULTIPLIZITÄT 1” SÄTZE IN DER DARSTELLUNGSTHEORIE

AVRAHAM AIZENBUD AND DMITRY GOUREVITCH

1. DARSTELLUNGSTHEORIE ENDLICHER GRUPPEN

Zu den wichtigsten Begriffen in der Mathematik zählt der Begriff der Gruppe und der Begriff des linearen Raums. Die Darstellungstheorie ist der Zweig der Mathematik, der beide Begriffe zusammenführt.

Eine *Darstellung* π von einer Gruppe G ist eine lineare Wirkung von G auf einem Vektorraum V. Dies bedeutet, dass wir jedem Element g eine lineare Abbildung $\pi(g)$ von V nach V zuordnen, so dass die Abbildung $\pi(gh)$, die dem Produkt gh zugeordnet ist, gleich der Verknüpfung $\pi(g) \circ \pi(h)$ ist. Hat V die Dimension n, so können diese Abbildungen durch $n \times n$ Matrizen beschrieben werden. Die Verknüpfung von Abbildungen entspricht dem Matrizenprodukt.

Es soll erst der Fall einer endlichen Gruppe betrachtet werden.

Beispiele. *Es bezeichne S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$. Diese Gruppe hat $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ Elemente.*

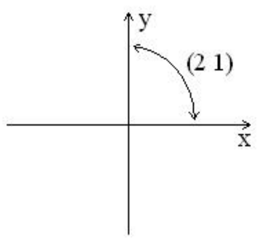
(1) *S_2 wirkt auf $\mathbb{R}^2$ durch Vertauschen der Koordinaten. Das bedeutet, dass wir der identischen Permutation $(1\,2)$ die Matrix*

$$\pi(1\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zuordnen und der nicht identischen Permutation $(2\,1)$ die Matrix

$$\pi(2\,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diesen Sachverhalt kann man so visualisieren:



(2) *Die S_3 wirkt auf unserem Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ durch das Vertauschen der Koordinaten. Also,*

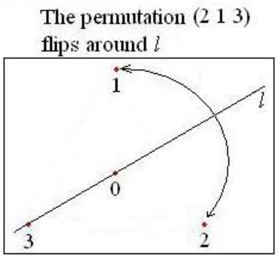
$$\pi(1\,2\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi(1\,3\,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi(2\,1\,3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

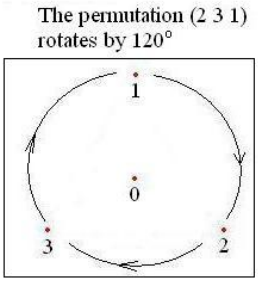
$$\pi(2\,3\,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi(3\,1\,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \pi(3\,2\,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptaufgabe der Darstellungstheorie ist es, alle Darstellungen einer gegebenen Gruppe zu klassifizieren. Der erste Begriff, der eingeführt wurde, um diese Aufgabe zu lösen, war der der *irreduziblen Darstellung*. Irreduzible Darstellungen sind die Bausteine aller Darstellungen. Eine Darstellung heisst irreduzibel, wenn sie keine Unterdarstellungen ausser $\{0\}$ und sich selbst besitzt.

Beispiele.

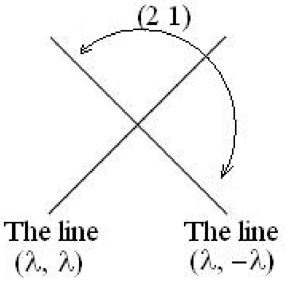
(1) *Jede Darstellung auf einem eindimensionalen Vektorraum ist irreduzibel.*
(2) *Man betrachte die 3-dimensionale Darstellung der S_3 von eben. Sie enthält die diagonale Ebene, die man algebraisch durch die Gleichung $x+y+z=0$ charakterisiert. Dies ist eine Unterdarstellung, und sie ist irreduzibel. Man kann diese Darstellung auch folgendermaßen betrachten: Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck in der Ebene mit dem Punkt 0 als Zentrum. Die S_3 operiert darauf durch Vertauschen der Ecken. Diese Operation lässt sich zu einer linearen Operation auf der ganzen Ebene fortsetzen.*





Ein fundamentaler Satz der Darstellungstheorie endlicher Gruppen besagt, dass jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe endlich-dimensional ist, und dass jede Darstellung einer endlichen Gruppe die direkte Summe von irreduziblen Darstellungen ist.

Beispiel. *Die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Wirkung von S_2 durch Vertauschen der Koordinaten zerlegt sich in die direkte Summe der beiden Winkelhalbierenden.*



Aufgrund dieses Satzes teilt sich die Aufgabe der Darstellungstheorie endlicher Gruppen in zwei Teile:

- Klassifiziere alle irreduziblen Darstellungen einer gegebenen endlichen Gruppe G.
- Verstehe, wie sich eine gegebene Darstellung in irreduzible zerlegt.

Für eine Darstellung π und eine irreduzible Darstellung τ kann man sich fragen, mit welcher Multiplizität τ in der Zerlegung von π in irreduzible Darstellungen auftaucht. Wir bezeichnen diese Zahl mit $\langle \pi, \tau \rangle$ und nennen sie die *Verkettungszahl*. Taucht z. B. τ in der Zerlegung von π nicht auf, dann ist $\langle \pi, \tau \rangle = 0$.

Eine interessante Fragestellung ist nun die: Was passiert, wenn man eine irreduzible Darstellung von G als Darstellung einer Untergruppe $H \subset G$ betrachtet? Sie ist in der Regel nicht mehr länger irreduzibel, und man kann ihre Zerlegung in irreduzible Darstellungen von H betrachten. Man sagt dann, das Paar

(G, H) habe die *Multiplizität 1 Eigenschaft*, wenn alle irreduziblen Darstellungen, die in der Zerlegung auftauchen, dies mit Multiplizität 1 tun. Anders gesagt, das Paar (G, H) hat die Multiplizität 1 Eigenschaft, wenn $\langle \pi|_H, \tau \rangle \leq 1$ für alle irreduzible Darstellungen π von G und τ von H, wobei mit $\pi|_H$ die Darstellung π gemeint ist, die man jetzt aber als eine Darstellung von H ansieht. Solche Paare nennt man auch *starke Gelfand Paare*.

In den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts führte I.M. Gelfand den folgenden algebraischen Trick ein, der einer anschaulichen Erklärung nur schwer zugänglich ist: Nehmen wir an, es existiere eine Abbildung $T : G \to G$, so dass für alle Elemente g, g' aus G gilt

(1) $T(T(g)) = g$
(2) $T(gg') = T(g')T(g)$
(3) es gibt ein h aus H, abhängig von g, so dass $T(g) = hgh^{-1}$.

Dann hat das Paar (G, H) die Multiplizität 1 Eigenschaft.

Beispiel. *Man kann zeigen, dass das Paar (S_{n+1}, S_n) die Multiplizität 1 Eigenschaft hat, indem man den Trick von Gelfand auf die Inversionsabbildung $T(g) = g^{-1}$ anwendet.*

Die Bedingung (3) kann man auch folgendermassen umformulieren.

Wir betrachten den Raum der Funktionen von G nach $\mathbb{R}$. Die Gruppe H wirkt auf diesem Raum auf die folgende Weise: $\pi(h)(\delta_g) = \delta_{hgh^{-1}}$, wobei die Funktion δ_g definiert ist durch

$$\delta_g(g') = \begin{cases} 1, & \text{if } g = g'; \\ 0, & \text{if } g \neq g'. \end{cases}$$

Eine Funktion f heisst H-*invariant*, wenn $\pi(h)f = f$ für alle h aus H gilt.

Dann ist die Bedingung (3) äquivalent zu der Bedingung

(3') jede H-invariante Funktion auf G ist auch T-invariant.

2. Darstellungstheorie unendlicher Gruppen

Wir wollen nun unendliche Gruppen betrachten. Dabei beschränken wir uns auf solche, die eine Art von geometrischer Struktur haben. Für gewöhnlich sind das dann topologische Gruppen. Man kann sich eine topologische Gruppe als eine Gruppe vorstellen, die gleichzeitig auch noch ein geometrisches Objekt ist. Beispiele sind die Gerade und der Torus (also die Oberfläche eines Reifens).

Eine schöne Klasse von topologischen Gruppen sind die kompakten. Anschaulich ausgedrückt ist eine topologische Gruppe kompakt, wenn sie als geometrisches Objekt von beschränkter Gestalt ist. So ist z. B. der Torus kompakt, die Gerade dagegen nicht.

Die Darstellungstheorie kompakter Gruppen ist ähnlich der von endlichen Gruppen. Insbesondere sind alle irreduziblen Darstellungen endlich-dimensional und jede Darstellung zerlegt sich in eine direkte Summe von irreduziblen. Auch bezüglich der Frage nach Multiplizität 1 verhalten sich kompakte Gruppen wie endliche Gruppen, und auch der Trick von Gelfand funktioniert noch.

Beispiel. *Es bezeichne $O_n(\mathbb{R})$ die Gruppe der Orthogonalmatrizen vom Rang n mit reellen Einträgen. Das ist eine kompakte Gruppe. Wendet man wieder Gelfands Trick auf die Abbildung $T(g) = g^{-1}$ an, so kann man zeigen, dass das Paar $(O_{n+1}(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R}))$ die Multiplizität 1 Eigenschaft besitzt.*

Im Falle nicht kompakter Gruppen ist die Situation viel komplizierter.

Die folgende Darstellung beschränkt sich auf den Fall *reduktiver Gruppen* über *lokalen Körpern*. Das beste Beispiel für eine reduktive Gruppe ist die Gruppe GL_n der invertierbaren $n \times n$ Matrizen. Ein Beispiel für einen lokalen Körper ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Weitere Beispiele sind die Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-*adischen Zahlen*. Diese sollen hier nicht definiert werden, aber sie verhalten sich ähnlich wie die reellen Zahlen. Tatsächlich ist der Umgang mit ihnen in vielen Aspekten wesentlich einfacher. Eine reduktive Gruppe über einem lokalen Körper F ist eine reduktive Gruppe mit Parametern aus dem Körper F. So ist z. B. die Gruppe $GL_n(F)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus F.

Das erste Problem, mit dem man bei nicht kompakten Gruppen zu kämpfen hat, ist, dass irreduzible Darstellungen unendlich-dimensional sein können.

Das zweite Problem ist, dass Darstellungen sich nicht immer in irreduzible zerlegen lassen. Dennoch lassen sich aber die Verkettungszahlen $\langle \pi, \tau \rangle$ definieren.

Das dritte Problem, auf das man stößt, hat mit Gelfands Trick zu tun. Seine wörtliche Übertragung auf den Fall nicht kompakter Gruppen ist falsch. Stattdessen gibt es eine Modifikation davon, die auf I.M. Gelfand und D. Kazhdan zurückgeht. Man benötigt immer noch eine Abbildung $T : G \to G$, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. In Bedingung (3') aber muss man anstelle von "Funktionen" "verallgemeinerte Funktionen" betrachten, sogenannte *Distributionen*. Die Bedingung lautet dann

(3") jede H-invariante Distribution auf G ist T-invariant.

Wir wollen nun erklären, was eine Distribution ist.

3. Distributionen

Die erste Distribution, die je betrachtet wurde, war Dirac's δ-Distribution. Sie wurde von dem Physiker P. Dirac in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts eingeführt. Dirac definierte sie als

"a function equal to zero outside 0, but the value at 0 is infinite and such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0 dx = 1\text{''}.$$

Er bemerkte auch, dass für jede stetige Funktion ϕ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Die Mathematiker seiner Zeit sagten natürlich, dass das nicht möglich sei. Und tatsächlich ist für eine Funktion, die überall bis auf einen Punkt den Wert Null annimmt, auch ihr Integral Null. Dennoch gelang es den Physikern, mit δ_0 Berechnungen anzustellen, die sinnvoll waren und zu wichtigen Ergebnissen führten.

Schliesslich gelang es Mathematikern, auf mathematisch strenge Weise Objekte zu definieren, die sich ähnlich verhalten konnten wie δ_0. Sie nannten diese Objekte *Distributionen*. Sie definierten eine Distribution als ein stetiges Funktional auf dem Raum der glatten Funktionen, die außerhalb eines Intervalls Null sind. In einfacheren Worten ausgedrückt ist es eine Art von Vorschrift, die jeder glatten Funktion, die ausserhalb eines Intervalls Null ist, eine Zahl zuordnet.

Beispiele.

(1) $\delta_0(\phi) = \phi(0)$

(2) *Jede stetige Funktion definiert auch eine Distribution durch die Vorschrift*

$$f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx.$$

4. ZURÜCK ZU MULTIPLIZITÄT 1

Es sei F ein lokaler Körper (z.B. $F = \mathbb{R}$) und $GL_n(F)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus F.

In den späten 80er Jahren des letzten Jahrhunderts haben J. Bernstein und S. Rallis die Vermutung aufgestellt, dass das Paar $(GL_{n+1}(F), GL_n(F))$ die Multiplizität 1 Eigenschaft hat.

Im Sommer 2007 bewiesen A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis und G. Schiffmann diese Vermutung für p-adische Körper.

Im Sommer 2008 wurde der Fall $F = \mathbb{R}$ und $F = \mathbb{C}$ von A. Aizenbud und D. Gourevitch bewiesen, und unabhängig davon auch von B. Sun and C.B. Zhu. Damit ist die Vermutung für alle lokalen Körper (der Charakteristik Null) bewiesen.

A. Aizenbud and D. Gourevitch sind Doktoranden am Weizmann Institute of Science und waren in beiden Sommern Besucher des Max-Planck-Instituts für Mathematik und des Hausdorff Center for Mathematics. Sie wurden in diesem Projekt von Eitan Sayag und Joseph Bernstein angeleitet.

5. EINIGE WORTE ZUM BEWEIS

Aufgrund des Kriteriums von Gelfand und Kazhdan genügt es zu zeigen, dass jede $GL_n(F)$-invariante Distribution ξ auf $GL_{n+1}(F)$ invariant unter Transponieren ist.

Der Beweis wird verkompliziert durch die Tatsache, dass es nicht für jede Matrix g aus $GL_{n+1}(F)$ eine Matrix h aus $GL_n(F)$ gibt, so dass $hgh^{-1} = g^t$.

Allerdings gibt es solche h für fast alle g. Genauer gesagt bilden diese g eine offene, dichte Menge. Dies hat zur Folge, dass jede stetige $GL_n(F)$-invariante Funktion auf $GL_{n+1}(F)$ invariant unter Transponieren ist. Daraus folgt aber nicht, dass auch jede $GL_n(F)$-invariante Distribution auf $GL_{n+1}(F)$ invariant unter der Transposition ist.

Allerdings kann man schließen, dass jede “schlechte” Distribution ξ (d. h. eine Distribution, die $GL_n(F)$-invariant, aber nicht invariant unter Transponieren ist) auf einer gewissen “kleinen” abgeschlossenen Teilmenge S von $GL_{n+1}(F)$ “leben” muss, d.h. dass sie Null ist auf $GL_n(F) \setminus S$. Es bleibt noch zu zeigen, dass auf S keine “schlechten” Distributionen “leben”.

Es gibt verschiedene Techniken, mit denen man solche Distributionen, die auf kleinen Teilmengen “leben”, bekämpfen kann. Die meisten von ihnen basieren auf der Fourier-Transformation. Diese soll hier jetzt nicht näher erläutert werden, stattdessen soll sie als eine Art “black box” benutzt werden, die aus einer Distribution wieder eine neue Distribution macht.

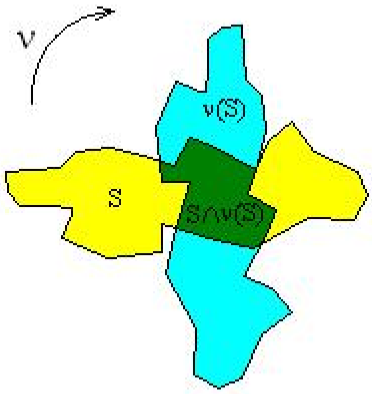
Ein wichtiges Phänomen im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation ist die sogenannte “Unschärferelation”. Diese besagt, dass eine Distribution, die auf einer kleinen Menge “lebt”, eine Fourier-Transformierte besitzt, die auf einer großen Menge “lebt”. So “lebt” z. B. Diracs δ_0 auf dem Punkt 0, ihre Fourier-Transformierte dagegen ist die konstante Funktion 1, die auf der ganzen reellen Gerade “lebt”.

Die Unschärferelation bewirkt nun, dass es sehr wenige Distributionen gibt, die zusammen mit ihren Fourier-Transformierten auf S “leben”. Da die Fourier-Transformierte einer “schlechten” Distribution aber wieder “schlecht” ist, bedeutet dies eine starke Einschränkung für “schlechte” Distributionen. In einem ähnlichen Problem ist diese Bedingung schon ausreichend, um zu zeigen, dass es keine “schlechten” Distributionen gibt.

Unglücklicherweise ist dies hier nicht der Fall, und dies war der Grund, warum viele Jahre lang keine Fortschritte bezüglich dieses Problems erziehlt wurden. Allerdings erzwingt die Bedingung, dass “schlechte” Distributionen auf viel kleineren Mengen “leben” müssen als es sonst der Fall wäre.

Schliesslich wurde das Problem gelöst durch die folgende einfache Beobachtung:

Sei $\nu : GL_{n+1}(F) \to GL_{n+1}(F)$ eine invertierbare Transformation, die die Situation erhält, also $\nu(g^t) = \nu(g)^t$ für jedes g aus $GL_{n+1}(F)$ und $\nu(hgh^{-1}) = h\nu(g)h^{-1}$ für jedes g aus $GL_{n+1}(F)$ und h in $GL_n(F)$. Dann bildet ν "schlechte" Distributionen wieder auf "schlechte" Distributionen ab. Daher lebt eine "schlechte" Distribution auf dem Durchschnitt von S mit $\nu(S)$.



Wendet man diese Beobachtung mehrmals an, und ebenfalls die Fourier-Transformation, so kommt man zu dem Ergebnis, dass eine "schlechte" Distribution auf der leeren Menge "leben" muss, also Null ist. Dies beweist die Vermutung.