DEFORMATIONEN VON BLÄTTERUNGEN

THOMAS VOGEL

ZUSAMMENFASSUNG. Wir diskutieren Anwendungen der 3-dimensionalen Kontakttopologie auf den Raum der Blätterungen durch Flächen. Ohne weitere geometrische Forderungen an die Blätterungen besteht der Raum der Blätterungen aus mehreren Zusammenhangskomponenten, und mit Methoden der algebraischen Topologie ist es einfach zu entscheiden, wann zwei gegebene Blätterungen in der gleichen Zusammenhangskomponente enthalten sind. Dagegen ist der Raum der straffen Blätterungen komplizierter. Wann zwei straffe Blätterungen in der gleichen Zusammenhangskomponente im Raum der straffen Blätterungen liegt, ist bisher nur in Einzelfällen bekannt.

Summary: We discuss an application of contact topology to the space of foliations by surfaces on 3-manifolds. Without further geometric restrictions on the foliation, the connected components of the space of foliations are well understood. In contrast to this, if one requires that all foliations under consideration are taut, then the space of these foliations is more complicated. So far, its connected components are classified only in few special situations.

1. Blätterungen und ihre Deformationen

Eine Mannigfaltigkeit der Dimension n ist ein Raum, in dem jeder Punkt eine Umgebung hat, die wie der euklidische Raum aussieht. So ist zum Beispiel die Kreislinie eine Mannigfaltigkeit. Mannigfaltigkeiten erhält man häufig als Lösungsmenge von einer oder mehreren Gleichungen. Zum Beispiel ist die 2-Sphäre die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Oft ist es interessant, Mannigfaltigkeiten zu studieren, die in Mannigfaltigkeiten höherer Dimension enthalten sind. Dabei betrachtet man häufig nicht nur einzelne Untermannigfaltigkeiten, sondern Familien, die auf bestimmte Weise organisiert sind. Ein besonders wichtiger Fall sind Blätterungen. Eine Blätterung der Dimension k in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Zerlegung von M in k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten, die Blätter genannt werden. Es wird gefordert, dass jeder Punkt von M in genau einem Blatt enthalten ist und dass jeder Punkt eine Umgebung U hat, sodass die Blätter in U genau so angeordnet sind, wie die Unterräume $\mathbb{R}^k \times \{x\}$ in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Blätterungen erhält man zum Beispiel durch Produktbildung: Wenn Σ eine Fläche ist, so hat das Produkt $\Sigma \times S^1$ von Σ mit dem Kreis S^1 eine offensichtliche Zerlegung in Flächen $\Sigma \times \{x\}, x \in S^1$.

Die einfachsten Beispiele findet man auf Flächen (also Mannigfaltigkeiten der Dimension 2) für $k = 1$. In diesem Fall ist jedes Blatt entweder ein Kreis oder eine unendlich lange Linie. Stellt man sich eine Wetterkarte vor, auf der an jedem Punkt Windrichtungen eingezeichnet sind, die stetig vom Ort abhängen, so erhält man eine Blätterung auf dem Teil des Globus, an dem es nicht windstill ist, indem man den Bahnen der Moleküle in der Luft folgt (wir nehmen an, dass die Luft sich immer parallel zur Erdoberfäche bewegt und dass die Windrichtung sich nicht mit der Zeit ändert). An den Punkten, wo die Windgeschwindigkeit Null ist, erhält man so natürlich keine Blätterung. In **Abbildung 1** ist die Windrichtung auf der Erde in einer Höhe von etwa 10 km dargestellt (am 15.1.2014, Farben entsprechen der Windgeschwindigkeit, blau entspricht niedrigen Windgeschwindigkeiten, violett sehr hohen. Das auffällige violette Band ist ein starker Westwind, der sogenannte jet-stream. Das Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn befindet sich im grünen Kreis.)

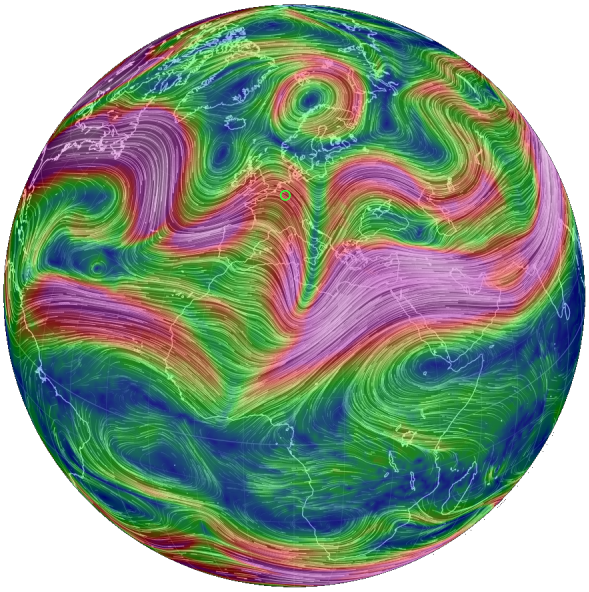

ABBILDUNG 1. Winde auf der Erde.
© http://earth.nullschool.net/, Verwendung unter der Lizenz *creative-commons license 4.0*

Man kann zeigen, dass es auf einer Sphäre keine stetige Verteilung von Windrichtungen gibt, die ohne windstille Punkte auskommt. Allerdings gibt es solche Verteilungen von Windrichtungen auf dem Torus T^2 der Dimension 2 (die Oberfläche eines Fahrradschlauches ist ein solcher Torus).

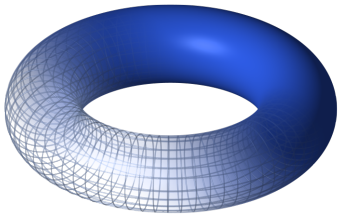

ABBILDUNG 2. Torus T^2.
© http://de.wikipedia.org, Datei von ihrem Urheber zur uneingeschränkten Nutzung freigegeben

Abbildung 3 gibt einen Eindruck davon, wie eine Blätterung auf dem Torus T^2 aussehen könnte. Um Blätterungen auf dem Torus darzustellen, wurde der Torus entlang von zwei Kurven γ und γ' aufgeschnitten (in **Abbildung 2** entsprechen diese Kurven zwei hellblauen Linien). Aus dem so entstandenem Rechteck erhält man den Torus zurück, indem man gegenüberliegende Seiten miteinander identifiziert. Die Blätter von $\mathcal{F}_0$ sind parallele Linien, die Blätterung $\mathcal{F}_1$ hat sowohl kreisförmige als auch linienförmige Blätter.

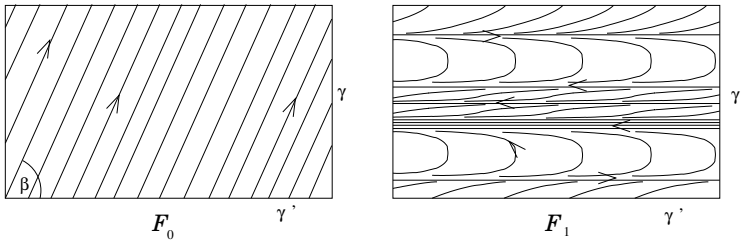

ABBILDUNG 3. Blätterungen $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ auf T^2.
© Max-Planck-Institut für Mathematik/Vogel

Die Auflistung aller Blätterungen auf dem Torus ist ziemlich kompliziert. Wie kompliziert diese Liste tatsächlich ist, hängt davon ab, wann man zwei Blätterungen als äquivalent betrachtet. Man könnte zum Beispiel sagen, dass zwei Blätterungen genau dann äquivalent sind, wenn es eine glatte, also unendlich oft differenzierbare, umkehrbare Abbildung gibt, die die Windrichtungen (also die Tangentialräume an die Blätter) aufeinander abbildet. In diesem Fall nennt man die Blätterungen isomorph. Eine andere

Möglichkeit wäre, zu sagen zwei Blätterungen seien genau dann äquivalent, wenn es eine stetige, umkehrbare Abbildung gibt, die Blätter auf Blätter abbildet. Je nachdem, welche Form von Äquivalenz man zugrunde legt, erhält man verschiedene Klassifikationen von Blätterungen auf dem Torus. Der wichtigste Unterschied zwischen den beiden bisher genannten Äquivalenzrelationen ist die Forderung nach der Glattheit der Abbildung im ersten Fall, während im zweiten Fall die Abbildung nur stetig sein muss.

Im Folgenden betrachten wir eine weitere Äquivalenzrelation von Blätterungen. Zwei Blätterungen $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ seien genau dann äquivalent, wenn sie stetig ineinander deformiert werden können. Damit meinen wir, dass es eine Familie $\mathcal{F}_s$ von Blätterungen gibt, die $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ verbindet, und zwar so, dass die Tangentialräume an die Blätter überall stetig von s abhängen. Zwei so verbundene Blätterungen nennt man homotop. Deformationen von Blätterungen können die Gestalt der Blätter stark verändern, zum Beispiel können im Fall $k = 1$ geschlossene Kreise auftauchen oder verschwinden. Dies geschieht zum Beispiel dann, wenn der Winkel β in der Beschreibung von $\mathcal{F}_0$ variiert. Es stellt sich deshalb die Frage, ob nicht auf jeder Mannigfaltigkeit alle Blätterungen homotop sind. Dann wäre die Äquivalenzrelation Homotopie uninteressant.

Der Einfachheit halber betrachten wir nun den Fall $k = 1$ auf dem Torus T^2 unter der folgenden Annahme: Alle Blätter sind mit einer Richtung ausgestattet, die stetig vom Ort abhängt. Tangentialvektoren an Blätter, die in die ausgezeichnete Richtung zeigen, nennen wir positiv. Die Blätterungen $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ in **Abbildung 3** sind nicht homotop. Dies kann man durch Betrachtung der Tangentialräume an die Blätter von $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ entlang der Kurve γ zeigen. Diese Kurve wird in unserem Beispiel von unten nach oben durchlaufen. Wir fixieren ein Paar von Vektoren H und V (im Bild sind diese Richtungen nicht eingezeichnet). Wir wählen H horizontal und V vertikal und vergleichen die Tangentialräume an die Blätter von $\mathcal{F}_0$ bzw. $\mathcal{F}_1$ mit den Richtungen V und H.

Die Tangentialräume an die Blätter von $\mathcal{F}_0$ enthalten den Vektor $X_0(\gamma(t)) = aH+bV$, wobei $\tan(\beta) = b/a$. Wir wählen X_0 und die folgenden Vektorfelder so, dass alle Vektoren die Länge eins haben und positiv sind. $X_0(\gamma(t))$ hängt also nicht von t ab. Im Gegensatz dazu gilt für die Blätterung $\mathcal{F}_1$

$$X_1(\gamma(t)) = f_H(t)H + f_V(t)V$$

für eindeutig bestimmte Funktionen f_H, f_V. Während die Kurve $\alpha_1(t) = (f_H(t), g_H(t)) \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene den Ursprung $(0, 0)$ genau einmal entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft, steht die Kurve $\alpha_0(t) = (a, b)$ still, umäuft den Ursprung also nicht. Wir nehmen nun an, es gibt eine stetige Deformation $\mathcal{F}_s$ mit $s \in [0, 1]$, die zwischen $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ interpoliert. Dann gäbe es eine stetige Familie von Kurven α_s, die für $s = 0$ den Ursprung nicht

umläuft während die Umlaufzahl für $s = 1$ eins beträgt. Es folgt, dass eine der Kurven α_s durch den Ursprung der Ebene läuft. Dies ist aber ausgeschlossen, da die Vektorfelder X_s immer Länge eins haben, also niemals verschwinden.

Die Relation Homotopie ist also für Blätterungen auf Flächen nicht trivial, aber auch nicht besonders interessant: Tatsächlich ist es nicht schwer zu beweisen, dass zwei Blätterungen auf T^2 genau dann homotop sind, wenn die oben konstruierten Umlaufzahlen für die Kurven γ und γ' übereinstimmen. Den Fall $k = 1$ für Mannigfaltigkeiten der Dimension $n > 2$ kann man ähnlich behandeln. Der Grund dafür ist, dass es genügt, Vektorfelder so zu deformieren, dass keine Nullstellen auftreten.

2. **Höherdimensionale Blätter und Integrabilität**

Der Fall $k = 2$ ist interessanter. Die Tangentialräume an die Blätter sind nun 2-dimensional und im Gegensatz zum Fall $k = 1$ ist es nicht wahr, dass jedes Ebenenfeld tangential an eine Blätterung ist (Ebenenfelder mit dieser Eigenschaft nennt man integrabel). Als Beispiel betrachten wir das Ebenenfeld ξ auf $\mathbb{R}^3$, welches am Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ von den Vektoren

$$(1, 0, 0) \text{ und } (0, 1, -x)$$

aufgespannt wird (s. **Abbildung 4**).

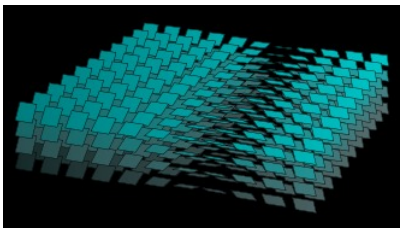

ABBILDUNG 4. Die Kontaktstruktur ξ auf $\mathbb{R}^3$.
© http://de.wikipedia.org, Datei von ihrem Urheber zur uneingeschränkten Nutzung freigegeben

Es gibt keine Fläche, die überall an ξ tangential ist. Dies sieht man, indem man den Schnitt des Ebenenfelds mit dem Rand des Zylinders $Z = Q \times \mathbb{R}$ betrachtet, wobei Q das Quadrat in der xy-Ebene mit den Eckpunkten $(0, 0), (\varepsilon, 0), (0, \varepsilon), (\varepsilon, \varepsilon)$ ist. Wenn es eine Fläche Σ gäbe, die überall tangential an ξ ist und den Punkt $(0, 0, 0)$ enthält, so würde der Schnitt von Σ mit dem Zylinder ein Stück der Fläche enthalten. Für hinreichend kleine Werte $\varepsilon > 0$ wäre der Rand dieses Flächenstücks dann eine geschlossene Kurve im Rand von Z, die tangential an ξ ist.

Betrachtet man aber den Schnitt der Ebenen ξ mit dem Rand ∂Z von Z, so erhält man eine eindimensionale Blätterung auf dem Rand des Zylinders, die keine geschlossenen Blätter hat: Alle Blätter, die man erhält, wenn man sich auf ∂Z in Richtungen tangential an ξ bewegt, sind spiralförmige Kurven auf ∂Z. Es gibt also keine Fläche, die überall tangential an ξ ist.

Ebenenfelder auf 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten M, die lokal äquivalent zu ξ sind (d. h. um jeden Punkt gibt es Koordinaten (x, y, z), sodass das Ebenenfeld bezüglich dieser Koordinaten die gleiche Gestalt wie ξ hat), bezeichnet man als Kontaktstrukturen. Diese Klasse von Ebenenfeldern ist nicht so anschaulich wie die der Blätterungen, trotzdem handelt es sich um eine viel untersuchte Klasse von Ebenenfeldern.

Ein Grund dafür, dass Kontaktstrukturen nützlich sind, ist, dass sie relativ unempfindlich gegenüber kleinen Störung sind: Variiert man das Ebenenfeld ξ nicht zu stark, so ist das resultierende Ebenenfeld ξ' wieder eine Kontaktstruktur. Darüber hinaus gibt es eine glatte Abbildung $\psi\colon M \longrightarrow M$, so dass $D\psi(\xi) = \xi'$. Die Kontaktstrukturen ξ und ξ' heißen dann isomorph. Variert man dagegen eine Blätterung, so kann man nicht erwarten, dass das resultierende Ebenenfeld wieder integrabel ist. Selbst wenn dies der Fall ist, ist die neue Blätterung im Allgemeinen nicht isomorph zur Ausgangsblätterung (dies sieht man zum Beispiel, indem man in **Abbildung 3** den Winkel β variiert).

3. Blätterungen und Kontaktstrukturen

Wir wollen nun eine Anwendung von Kontaktstrukturen und deren Stabilität auf Blätterungen diskutieren. Dass überhaupt ein Zusammenhang zwischen Blätterungen und Kontaktstrukturen besteht, ergibt sich aus einem Theorem von Yakov Eliashberg und Bill Thurston. Es besagt, dass außer der Blätterung der Mannigfaltigkeit $S^2 \times S^1$ durch Sphären jede Blätterung durch Kontaktstrukturen approximiert werden kann. Dieser Satz erlaubt es, aus jeder Konstruktion interessanter Blätterungen auf 3-Mannigfaltigkeiten potenziell interessante Kontaktstrukturen zu gewinnen.

In höheren Dimensionen ist kein vergleichbarer Satz bekannt und wir werden uns nun auf Blätterungen auf 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten beschränken, wobei jedes Blatt eine Fläche ist.

Wie wir oben gesehen haben, ist nicht jedes Ebenenfeld integrabel. Um zu beweisen, dass zwei Blätterungen $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ homotop sind, genügt es also nicht, eine Familie von Ebenenfeldern anzugeben, die zwischen den Tangentialräumen an $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ interpoliert. Es ist aber offenbar notwendig, dass eine solche Familie von Ebenenfeldern existiert, wenn man eine Homotopie zwischen zwei Blätterungen finden möchte.

Auf den ersten Blick scheint es, dass es schwierig sein sollte, Homotopien zwischen zwei gegebenen Blätterungen zu finden. Tatsächlich gibt es aber in vielen Fällen sehr effektive Methoden. Für Blätterungen auf 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch Flächen hat Hélène Eynard gezeigt, dass unter milden technischen Bedingungen je zwei Blätterungen $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ homotop sind, falls eine Familie von (eventuell nicht integrablen) Ebenenfeldern existiert, die die Tangentialräume der Blätter von $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ verbindet.

Wann es eine solche Familie von Ebenenfeldern gibt kann man mithilfe von Invarianten aus der algebraischen Topologie sehr einfach feststellen. Daher könnte man die Frage nach der Klassifikation von Blätterungen auf 3-Mannigfaltigkeiten bis auf Homotopie als erledigt betrachten. Es gibt aber wichtige Gründe, Blätterungen mit bestimmten geometrischen Eigenschaften zu betrachten. Eine solche Eigenschaft ist Straffheit. Eine Blätterung $\mathcal{F}$ ist straff, falls für jedes Blatt L von $\mathcal{F}$ eine geschlossene Kreislinie in M existiert, die nirgendwo tangential an die Blätter von $\mathcal{F}$ ist und L schneidet.

Diese Definition ist immer dann sinnvoll, wenn die Dimension der Blätter um eins kleiner ist, als die Dimension der Mannigfaltigkeit. Die Blätterung $\mathcal{F}_1$ auf dem Torus in **Abbildung 3** ist nicht straff: Kein kreisförmiges Blatt von $\mathcal{F}_1$ hat eine geschlossene Transversale. Dagegen ist die Blätterung $\mathcal{F}_0$ in **Abbildung 3** straff.

Warum Straffheit eine interessante Eigenschaft ist, kann an dieser Stelle nur angedeutet werden. Zum Beispiel ist bekannt, dass es auf jeder 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine Blätterung gibt. Es ist aber nicht bekannt, wann es eine straffe Blätterung gibt.

Wir stellen nun die Frage, wann für homotope, straffe Blätterungen $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ die Familie $\mathcal{F}_s$ so gewählt werden kann, dass auch jede der Blätterungen $\mathcal{F}_s$ straff ist.

Thomas Vogel (MPI für Mathematik) hat gezeigt, dass die Kontaktstukturen, die eine Blätterung approximieren, bis auf Isomorphie eindeutig sind, falls es keine Blätter gibt, die die Form eines Torus haben (und eine weitere, sehr milde Bedingung erfüllt ist). Dies erlaubt es, Invarianten von Kontaktstrukturen auf Blätterungen ohne Torusblätter zu übertragen.

Auf vielen Mannigfaltigkeiten stimmt die Klasse der Blätterungen ohne Torusblätter mit den straffen Blätterungen überein. Auf diesen Mannigfaltigkeiten kann man unser Problem also umformulieren in die Frage, ob zwei Blätterungen $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ ohne Torusblätter durch Familien ebensolcher Blätterungen verbunden werden können. Wenn ja, so sind die Kontaktstrukturen ξ_0 bzw. ξ_1, die $\mathcal{F}_0$ bzw. $\mathcal{F}_1$ approximieren isomorph. Es ist aber möglich, explizit Paare von straffen Blätterungen $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ anzugeben, sodass $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ einerseits homotop sind, während andererseits die Kontaktstrukturen, die sie approximieren, nicht isomorph sind. Dies zeigt, dass homotope, straffe

Blätterungen nicht immer homotop in der Klasse straffer Blätterungen sind. Solche Beispiele wurden zuerst von Thomas Vogel und dann von Jonathan Bowden (Universität Augsburg und 2012 Gast am MPI für Mathematik) gefunden.

Zahlreiche weitere Probleme sind offen. Ein besonders wichtiges ist die Charakterisierung derjenigen Kontaktstrukturen, die man durch Approximation straffer Blätterungen erhält. Diese und andere Fragen sind Gegenstand aktueller Forschung.