BORCHERDSPRODUKTE

CHRISTIAN KAISER

ZUSAMMENFASSUNG. Wir geben eine Einführung in die klassische Theorie der elliptischen Modulformen. Danach diskutieren wir kurz den als Moonshine-Phänomen bekannten Zusammenhang der j-Funktion mit der Monstergruppe, der größten einfachen sporadischen endlichen Gruppe. Dieser war historisch der Ausgangspunkt zu Borcherds' Entdeckung eines Lifts schwach holomorpher elliptischer Modulformen zu Modulformen für orthogonale Gruppen des Typs $O(n, 2)$, den Borcherdsprodukten. Am Schluss diskutieren wir verschiedene Arten der Charakterisierung von Borcherdsprodukten.

Summary: We give a short introduction to the classical theory of elliptic modular forms. Then we shortly explain the unexpected connection called moonshine between the j-function and the monster group, the largest sporadic simple finite group. Studying moonshine has been Borcherds' starting point for inventing a lifting of weakly holomorphic elliptic modular forms to modular forms for orthogonal groups of type $O(n, 2)$. Finally we discuss various ways of characterizing these lifted forms called Borcherds products.

1. Elliptische Kurven

Schon einfache Beispiele wie die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zeigen, dass die reellen Zahlen ein zum Lösen von Polynomgleichungen zu kleiner Zahlenbereich sind. Dem Beispiel kann man schnell Rechnung tragen, indem man den reellen Zahlen eine Quadratwurzel aus -1 beifügt. Der so gewonnene Zahlenbereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen besteht nun aus formalen Summen der Form $a + bi$, wobei a und b reelle Zahlen sind und das Symbol i der Gleichung $i^2 = -1$ genügt. In $\mathbb{C}$ besitzt nun nicht nur das Polynom $x^2 + 1$, sondern tatsächlich jedes nichtkonstante Polynom eine Nullstelle, und dann auch (mit Vielfachheiten gezählt) genau soviele, wie sein Grad ist. Diese Vereinfachung beim Übergang von reeller Lösungsmenge zu komplexer Lösungsmenge zeigt sich auch in höheren Dimensionen. Die Gleichung $x^2 + y^2 = a$ hat in den reellen Zahlen für $a = -1$ keine Lösungen, für $a = 0$ genau eine Lösung $(x, y) = (0, 0)$ und für $a = 1$ eine Kreislinie als Lösungsmenge. Über den komplexen Zahlen dagegen ist die Gleichung nach Übergang zu neuen Variablen $u = x + iy, v = x - iy$ von der Form

$uv = a$ und hat für $a \neq 0$ die komplexe Lösungsmenge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Man projektiviert die Gleichung, indem man sie mittels einer weiteren Variablen w in homogener Form als $uv = aw^2$ schreibt, $(0, 0, 0)$ nicht zur Lösungsmenge zulässt und Lösungstripel, die sich nur um einen gemeinsamen Faktor unterscheiden, als gleich ansieht. So kommen noch zwei weitere Lösungen $(u, v, w) = (1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ dazu, und die so erhaltene *projektive Lösungsmenge* hat nun die Gestalt einer 2-dimensionalen Sphäre. Für $a = 0$ dagegen ist die Lösungsmenge die Vereinigung zweier Geraden, die sich im Punkt $(0, 0)$ schneiden, ein singulärer Fall. Die projektive Lösungsmenge einer allgemeinen Polynomgleichung $P(x, y) = 0$ ist im nichtsingulären Fall immer von der Gestalt einer Sphäre, an die man eine Anzahl von „Henkeln" angeklebt hat. Da seine komplexe Dimension 1 ist, nennt man solche Nullstellenmengen *Kurven* und die Anzahl der Henkel ist das *Geschlecht* der Kurve. Während es nur eine Kurve vom Geschlecht 0 gibt (nämlich die eben betrachtete), gibt es für höhere Geschlechter kontinuierlich viele Kurven mit diesem Geschlecht.

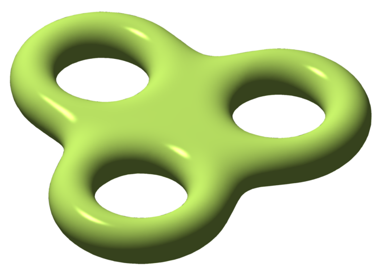

ABBILDUNG 1. Eine komplexe Kurve vom Geschlecht 3.
© http://de.wikipedia.org, Datei von ihrem Urheber zur uneingeschränkten Nutzung freigegeben

Eine besondere Rolle spielen die Kurven vom Geschlecht 1, da man für sie nach Auswahl eines „Nullpunkt" auf rein algebraische Weise (also mittels Polynomen) eine Addition zweier Punkte definieren kann, sodass die Punkte auf der Kurve eine kommutative Gruppe bilden. Eine solche Kurve mit Nullpunkt nennt man eine *elliptische Kurve*. Alle elliptischen Kurven lassen sich in sogenannter *Weierstraß-Form* schreiben:

$$E_{(g_2,g_3)} : \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Zwei nichtsinguläre Weierstraß-Formen $E_{(g_2,g_3)}$ und $E_{(g_2',g_3')}$ beschreiben genau dann *isomorphe* elliptische Kurven, wenn $(g_2', g_3') = (a^4g_2, a^6g_3)$ für ein $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist (die Isomorphie wird durch die Abbildung $x \mapsto a^2x$ und $y \mapsto a^3y$ hergestellt). Dabei sind g_2 und g_3 komplexe Zahlen und $E_{(g_2,g_3)}$ ist nichtsingulär g. d. w. ihre *Diskriminante* $\Delta = {g_2}^3 - 27{g_3}^2 \neq 0$ ist.

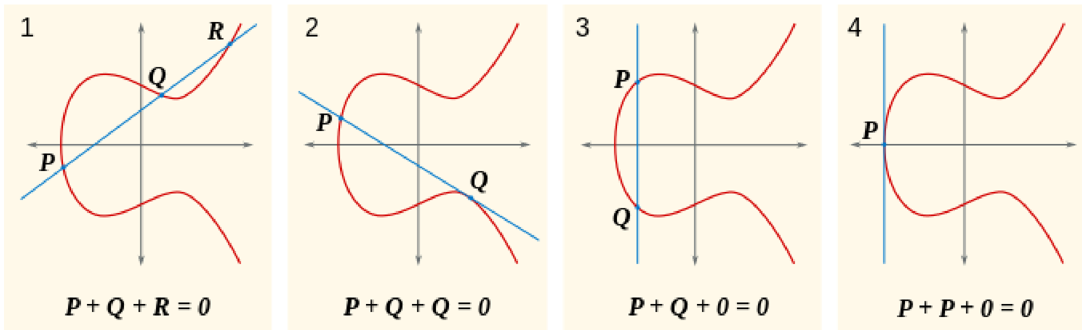

ABBILDUNG 2. Die Bilder zeigen die reellen Lösungen einer Weierstraß-Gleichung und das Addieren von Punkten.

Der Ausdruck $j = 1728{g_2}^3/\Delta$ ist daher wohldefiniert, hängt nur von der Isomorphieklasse der elliptischen Kurve ab (und nicht von der benutzten Weierstraß-Form) und wird die *j-Invariante* der elliptische Kurve genannt. Tatsächlich bestimmt sie die Kurve bis auf Isomorphie, und jede komplexe Zahl ist die j-Invariante einer elliptischen Kurve.

Neben der algebraischen Klassifikation elliptischer Kurven durch ihre j-Invariante gibt es noch eine analytische Klassifikation. Diese benützt, dass eine elliptische Kurve auch als ein *Quotient* (also als eine Nebenklassenmenge) der komplexen Ebene nach einem Gitter beschrieben werden kann:

$$E_\Gamma = \mathbb{C}/\Gamma = \{z + \Gamma \mid z \in \mathbb{C}\}.$$

Dabei sind Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ Untergruppen in $\mathbb{C}$, die von zwei komplexen Zahlen e_1 und e_2, die keine reellen Vielfachen voneinander sind, erzeugt werden. Die Identifizierung solcher Quotienten mit den Lösungsmengen von Weierstraß-Gleichungen basiert auf der von Γ abhängigen *Weierstraßschen $\wp$-Funktion*

$$\wp_\Gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_\gamma{}' \Big(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\Big)$$

und ihrer Ableitung $\wp'_\Gamma(z)$, die beide Γ-periodische Funktionen sind und zusammen einer Weierstraß-Gleichung genügen:

$$\wp'_\Gamma(z)^2 = 4\wp_\Gamma(z)^3 - g_2(\Gamma)\wp_\Gamma(z) - g_3(\Gamma).$$

Hierbei sind $g_2(\Gamma) = 60\sum'_\gamma \gamma^{-4}$ und $g_3(\Gamma) = 140\sum'_\gamma \gamma^{-6}$, und $\sum'$ bezeichnet die Summierung über $\gamma \neq 0$ aus Γ.

Ändert man das Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ zu einem Gitter $a\Gamma = \mathbb{Z}ae_1 + \mathbb{Z}ae_2$ ab (man spricht von einem zu Γ *homotheten* Gitter), so multiplizieren sich

$g_2(\Gamma)$ b.z.w. $g_3(\Gamma)$ mit a^{-4} b.z.w. mit a^{-6}, und ihre Weierstraß-Gleichungen beschreiben daher isomorphe elliptische Kurven. Auf diese Weise entsprechen die Isomorphieklassen elliptischer Kurven eineindeutig den Homothetieklassen von Gittern in $\mathbb{C}$. Teilen durch e_1 zeigt, dass jedes Gitter homothet zu einem der Form $\Gamma_\tau = \mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\tau$ ist, wobei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine nichtreelle komplexe Zahl ist. Die Zahl τ selbst ist allerdings keine Gitterinvariante, da sie von der Wahl der Erzeugenden (e_1, e_2) abhängt. So würde z. B. dem Paar (e_2, e_1) die Zahl $1/\tau$ und dem Paar $(e_1, e_1 + e_2)$ die Zahl $\tau + 1$ zugeordnet werden. Einem allgemeinen Basiswechsel entspricht eine Matrix $\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$, also eine ganzzahlige Matrix, die eine ganzzahlige inverse Matrix besitzt, und τ ändert sich gemäß einer gebrochen-linearen Wirkung von $GL_2(\mathbb{Z})$ auf $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ab:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Homothetieklassen von Gittern, und damit auch elliptische Kurven, werden also durch $GL_2(\mathbb{Z})$-Bahnen in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, oder äquivalent, durch $SL_2(\mathbb{Z})$-Bahnen in der *oberen Halbebene* $\mathbb{H} = \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$, beschrieben. Auf diese Weise kann kann man die j-Invariante als eine Funktion $j(\tau)$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ auffassen, die $SL_2(\mathbb{Z})$-invariant ist:

$$j\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\Big) = j(\tau),$$

und sie identifiziert den Bahnenraum mit $\mathbb{C}$:

$$j : \; SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

2. **Elliptische Modulformen**

Die Überlegungen am Ende von Kapitel 1 lassen sich auch auf Gitterinvarianten $f(\Gamma)$ anwenden, die nicht notwendig invariant, aber immer noch homogen unter Homothetien sind, d. h. die für eine gerade Zahl k die Gleichung $f(a\Gamma) = a^{-k}f(\Gamma)$ erfüllen. Auch diese führen zu Funktionen $f(\tau)$ auf der oberen Halbebene, die aber anstatt einer Invarianz allgemeiner die folgende modulare Transformationseigenschaft unter $SL_2(\mathbb{Z})$ besitzen:

$$f\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\Big) = (c\tau + d)^k f(\tau).$$

Insbesondere erfüllen solche Funktionen die Gleichung $f(\tau) = f(\tau + 1)$ und sind daher Funktionen in der Variablen $q = e^{2\pi i\tau}$. Man nennt f eine *schwach holomorphe Modulform vom Gewicht* k, wenn sie als eine für $0 < |q| < 1$ konvergente Reihe $f(\tau) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} a(n)q^n$ geschrieben werden kann, einer Reihe also, in der höchstens endlich viele q-Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen. Tauchen in der q-Reihe keine q-Potenzen mit negativen Exponenten beziehungsweise nur q-Potenzen mit positiven Exponenten auf, so spricht man von einer (elliptischen) Modulform beziehungsweise einer Spitzenform.

Die einfachsten Beispiele von Modulformen sind die konstanten Funktionen, die Modulformen vom Gewicht 0 sind. Tatsächlich folgt aus dem sogenannten Maximumprinzip der Funktionentheorie, einem Grundpfeiler der komplexen Analysis, dass diese auch schon alle Modulformen vom Gewicht 0 sind. Insbesondere kann die j-Funktion keine Modulform sein, aber sie wird sich gleich als eine schwach holomorphe Modulform erweisen. Nichtverschwindende Modulformen von negativen Gewichten kann es nicht geben, da man sonst durch eine geeignete Produktbildung von Modulformen negativen Gewichts mit Modulformen positiven Gewichts (und die gibt es!) eine nichtkonstante Modulform vom Gewicht 0 konstruieren könnte.

Eine Klasse von Modulformen, die man besonders explizit beschreiben kann, sind für $k \geq 2$ die *Eisensteinreihen*

$$E_k(\tau) = 1 + \gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$$

vom Gewicht $2k$, die bis auf einen Faktor den Gitterfunktionen $G_k(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^{-2k}$ entsprechen. Hier ist γ_k eine gewisse Konstante und $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ die Summe der k-ten Potenzen aller Teiler von n. Für $k = 1$ konvergiert die q-Reihe von E_k nicht, und tatsächlich gibt es auch keine (nichtverschwindende) Modulform vom Gewicht 2. Aus der Definition der Gitterinvarianten j in Kapitel 1 folgt für die j-Funktion die Identität $j = 1728 E_2^3/(E_2^3 - E_3^2)$, und sie besitzt daher eine q-Entwicklung der Form

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots,$$

womit sie eine schwach holomorphe Modulfunktion ist.

Modulformen kann man mit Zahlen multiplizieren, Modulformen von gleichem Gewicht kann man addieren, und zwei beliebige Modulformen kann man miteinander multiplizieren: immer erhält man wieder eine Modulform. Tatsächlich kann man jede Modulform auf diese Weise aus E_2 und E_3 erhalten, und der von den Modulformen aufgespannte Vektorraum von Funktionen $M_\star$ bildet eine von E_2 und E_3 erzeugte Polynomalgebra:

$$M_\star = \mathbb{C}[E_2, E_3].$$

Dies liegt im Wesentlichen an der Existenz der speziellen Modulform $\Delta(\tau) = (E_2(\tau)^3 - E_3(\tau)^2)/1728$ vom Gewicht 12, die bis auf einen Faktor der gleichnamigen Gitterinvarianten $\Delta = {g_2}^3 - 27{g_3}^2$ aus Kapitel 1 entspricht. Da die Gitterinvarianten nie verschwinden, hat diese Modulform keine Nullstelle und ihre q-Entwicklung beginnt mit $q + \dots$, und folglich ist $\Delta(\tau)$ eine Spitzenform. Das Fehlen einer Nullstelle von $\Delta(\tau)$ impliziert, dass jede Spitzenform durch $\Delta(\tau)$ geteilt werden kann. Insbesondere gibt es keine (nichtverschwindenden) Spitzenformen vom Gewicht < 12. In diesen kleinen Gewichten kann es also jeweils (bis auf Vielfache) höchstens eine Modulform geben. Dies schließt jetzt die Existenz einer Modulform E_1 vom Gewicht 2 aus: nach Skalierung hätte E_1 die q-Reihe $1 + \dots$ und es wäre $E_1^2 = E_2$ und $E_1^3 = E_3$ und damit $\Delta(\tau)$ die Nullfunktion, was ein Widerspruch ist. Andererseits gibt es in jedem Gewicht $2k > 2$ eine Modulform der Form $E_2^a E_3^b$ für geeignete natürliche Zahlen a und b, sodass jede Modulform von diesem Gewicht die Summe von einem Vielfachen von $E_2^a E_3^b$ und von einem Produkt von $\Delta(\tau)$ mit einer anderen Modulform vom Gewicht $2k - 12$ ist. Da Modulformen von negativem Gewicht Null sind, kann man diese Gewichtsreduktion nicht beliebig oft wiederholen und sieht so, dass E_2 und E_3 die Algebra der Modulformen $M_\star$ erzeugen (diese Bezeichnung für $M_\star$ ist leicht missbräuchlich, da nicht alle Funktionen in $M_\star$ Modulformen sind).

Insbesondere bilden die Modulformen von einem festen Gewicht $2k$ einen endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum, der $\{E_2^a E_3^b \mid 2a + 3b = k\}$ als Basis hat.

Durch Invertieren von Δ erhält man die Algebra der schwach holomorphen Modulformen

$$M_\star[\Delta^{-1}] = \bigcup_n \Delta^{-n} \mathbb{C}[E_2, E_3],$$

die als Unteralgebra den Polynomring $\mathbb{C}[j]$ der Formen vom Gewicht 0 enthält.

Dieses Ergebnis könnte man so interpretieren, dass Modulformen voll verstanden und eher langweilig sind. Doch dieser Eindruck täuscht und das liegt (unter anderem) daran, dass in ganz unterschiedlichen Gebieten der Mathematik q-Reihen auftreten, die sich (oft zur großen Überraschung) als q-Entwicklungen von Modulformen entpuppen.

Ein spektakuläres Beispiel ist das *Moonshine-Phänomen* (Moonshine hat hier die Bedeutung von „Quatsch“ und deutet an, was man anfänglich von diesem Phänomen hielt). Anfang der 1980er Jahre des letzten Jahrhunderts entdeckte McKay einen unerwarteten Zusammenhang zwischen der j-Funktion und der sogenannten *Monstergruppe*. Die Monstergruppe ist die größte endliche einfache sporadische (also nicht in einer Serie auftauchende) Gruppe und besitzt ungefähr $8 \cdot 10^{53}$ Elemente. Sie hat 194 verschiedene irreduzible Darstellungen (d. h. sie lässt sich auf 194 wesentlich verschiedene unzerlegbare Weisen in Matrizengruppen abbilden), und die Grade dieser

Darstellungen (also die Grösse ihrer Matrizen) sind in aufsteigender Reihenfolge $r_1 = 1, r_2 = 196883, r_3 = 21296876, \ldots$. McKays Beobachtung ist, dass die Koeffizienten der q-Reihe von $j - 744$ einfache Linearkombinationen der Grade sind:

$$196884 = r_1 + r_2,\ 21493760 = r_1 + r_2 + r_3,\ \ldots.$$

MacKay und Thompson vermuteten, dass es eine „natürliche“ Serie von Darstellungen $V_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ der Monstergruppe gibt, für die

$$j(q) - 744 = \sum_{n=-1}^{\infty} \dim(V_{n+1}) q^n$$

gilt und allgemeiner $\sum_{n=-1}^{\infty} Tr(g|V_{n+1})q^n$ die q-Reihen von weiteren Modulformen sind. Hier ist $Tr(g|V_{n+1})$ die Spur, also die Summe aller Diagonaleinträge, der Matrix, die dem Gruppenelement g mittels der Darstellung V_{n+1} entspricht. Conway und Norton identifizierten später diese McKay-Thompson-Reihen genannten q-Reihen als Hauptmoduln, also als Analoga der j-Funktion für gewisse andere Untergruppen von $SL_2(\mathbb{R})$ vom Geschlecht 0. Frenkel, Lepowsky und Meuerman konstruierten Ende der 1980er Jahre eine sogenannte Vertex-Operator-Algebra $V = \oplus_{n\geq 0} V_n$ (das ist eine komplizierte algebraische Struktur, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen), die das Monster als Automorphismengruppe besitzt. In den frühen 1990er Jahren bewies Borcherds, dass die Darstellungen $\{V_n\}$ die von MacKay und Thompson und von Conway und Norton geforderten Eigenschaften besitzt. Er erhielt dafür 1998 die Fieldsmedaille, die höchste mathematische Auszeichnung.

3. **Thetalift**

Eine andere (seit langem bekannte) Quelle von Modulformen sind positiv definite gerade quadratische Formen $Q(x) = 1/2 \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_i x_j$, wobei die Adjektive bedeuten, dass die $a_{ij} = a_{ji}$ ganze Zahlen, die Diagonaleinträge a_{ii} gerade und $Q(x) > 0$ für alle r-Tupel reeller Zahlen $x = (x_i) \neq (0, \ldots, 0)$ sind. Dann bilden die q-Reihen

$$\theta(\tau, Q) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^r} e^{2\pi i Q(m)\tau} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_Q(n) q^n,$$

wobei $a_Q(n)$ die Anzahl von r-Tupeln m ganzer Zahlen mit $Q(m) = n$ angibt, Modulformen vom Gewicht $r/2$. Ist die Matrix $A = (a_{ij})$ zusätzlich *unimodular*, d. h. ist ihre Determinante ± 1, so ist $\theta(\tau, Q)$ eine Modulform für $SL_2(\mathbb{Z})$ (unimodular zu sein ist aber eine starke Forderung und impliziert, dass der *Rang* r der Matrix A ein Vielfaches von 8 ist). Im Allgemeinen ist $\theta(\tau, Q)$ nur eine Modulform bezüglich einer *Kongruenzuntergruppe* von $SL_2(\mathbb{Z})$, also einer durch gewisse Teilbarkeitseigenschaften definierten Untergruppe, und ihr Gewicht kann einen halbzahligen Wert annehmen. Damit für solche Gewichte die modulare Transformationseigenschaft ihren Sinn behält, muss angegeben werden, welche Quadratwurzel aus $cz + d$ gezogen werden soll. Diese Information wird dann Teil des Datums der Matrix und entspricht dem Übergang von $SL_2(\mathbb{Z})$ zu seiner sogenannten metaplektischen Überlagerung $\widehat{SL_2}(\mathbb{Z})$.

Die Zuordnung einer Modulform zu einer quadratischen Form ist ein Spezialfall des sogenannten *Thetalifts*, der allgemein für gewisse Paare von reellen Liegruppen (G_1, G_2) (sogenannte *reduktive duale Paare*) Modulformen für die Gruppe G_1 zu Modulformen für die Gruppe G_2 liftet. Hierbei ist der Begriff „Modulform für eine Gruppe G“ viel weiter zu fassen als es bisher hier getan wurde, aber es sind immer Funktionen auf dem symmetrischen Raum X_G zu einer reellen Liegruppe G (wie z. B. der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ für $SL_2(\mathbb{R})$), die eine modulare Transformationseigenschaft bezüglich den Elementen einer diskreten Untergruppe von G besitzen und einer Differentialgleichung genügen (wie es z. B. holomorphe Funktionen tun). Die von Weil eingeführte *metaplektische Darstellung* liefert Integralkerne $K(x_1, x_2)$ auf $X_{G_1} \times X_{G_2}$, die es erlauben, mittels Integraloperatoren Funktionen von X_{G_1} nach X_{G_2} zu liften:

$$f \mapsto \Theta(f)(x_2) = \int f(x_1)K(x_1, x_2)dx_1.$$

Ein Beispiel für ein solches duales Paar ist $(O(Q)(\mathbb{R}), \widehat{SL_2}(\mathbb{R}))$, wobei $O(Q)(\mathbb{R})$ die Isometriegruppe einer quadratischen Form Q und $\widehat{SL_2}(\mathbb{R})$ die metaplektische Überlagerung von $SL_2(\mathbb{R})$ ist. Die Gruppe $O(Q)(\mathbb{R})$ besteht aus den reellen $r \times r$-Matrizen $g = (g_{ij})$ mit $gAg^t = A$, wobei $g^t = (g_{ji})$ aus g durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen entsteht. Der symmetrische Raum zu $O(Q)(\mathbb{R})$ ist die Menge der Unterräume von $\mathbb{R}^r$, auf die Q eingeschränkt positiv definit ist und die bezüglich dieser Eigenschaft maximal sind. Er hat die Struktur einer reellen Mannigfaltigkeit und ist isomorph zu $\mathbb{R}^{p(r-p)}$, wobei p die gemeinsame Dimension dieser Unterräume ist (man sagt dann, dass Q die Signatur $(p, r-p)$ hat). Ist Q definit, also entweder $p = 0$ oder $p = r$, so besteht der symmetrische Raum nur aus einem Punkt und $\theta(\tau, Q)$ ist der Lift der konstanten Funktion darauf. Im indefiniten Fall dagegen ist der symmetrische Raum positivdimensional und der Raum der Modulformen darauf reichhaltiger.

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn p oder $r - p$ gleich 2 ist. Dann ist der symmetrische Raum $\mathbb{H}_{r-2}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^{r-2}$, ähnlich wie $\mathbb{H}$ in $\mathbb{C}$, und man kann darauf holomorphe Modulformen von einem gewissen Gewicht betrachten. Für gerade unimodulare Formen Q zum Beispiel ist es natürlich, Modulformen bezüglich $O(Q)(\mathbb{Z})$, der Untergruppe der ganzzahligen Matrizen in $O(Q)(\mathbb{R})$, zu betrachten. Natürlich kann der Integralkern auch zum Liften in die andere Richtung, also von $\widehat{SL_2}(\mathbb{R})$ nach $O(Q)(\mathbb{R})$, benutzt werden. Dieser Lift spielt eine Rolle bei der Konstruktion von Borcherdsprodukten.

4. **Borcherdsprodukte**

Borcherds führte im Rahmen seiner Arbeit zum Moonshine-Phänomen sogenannte *verallgemeinerte Kac-Moody-Algebren* ein. Diese sind unendlichdimensionale Verallgemeinerungen der klassischen halbeinfachen komplexen Lie-Algebren und besitzen eine ähnliche Darstellungstheorie wie diese. Insbesondere gilt eine Entsprechung der berühmten Weylschen Charakterformel und der Produktdarstellung ihres Nenners. MacDonald hatte in den 1970er Jahren für eine Teilklasse davon, den sogenannten *affinen Lie-Algebren*, bewiesen, dass ihre *Nennerformeln* interessante Identitäten für Thetareihen und elliptische Modulformen beinhalten. Borcherds fand in dem von ihm geschaffenen größeren Rahmen neue Algebren, deren Nennerformeln Produktdarstellungen meromorpher (also Quotienten von holomorphen) Modulformen zu Isometriegruppen quadratischer Formen der Signatur $(n, 2)$ sind. Das berühmteste Beispiel ist die Nennerformel für die Monster-Lie-Algebra, die zusammen mit ihren getwisteten Formen das Moonshineproblem löste:

$$j(\tau_1) - j(\tau_2) = q_1^{-1} \prod_{\substack{k>0 \\ l>-\infty}} (1 - q_1^k q_2^l)^{c(kl)}.$$

Hier ist $q_1 = e^{2\pi i \tau_1}$, $q_2 = e^{2\pi i \tau_2}$ und die Exponenten $c(n)$ sind die q-Entwicklungskoeffizienten von $J(\tau) = j(\tau) - 744$. Das Produkt konvergiert für $\mathfrak{Im}(\tau_1)\mathfrak{Im}(\tau_2) > 1$, wobei $\mathfrak{Im}(\tau)$ den Imaginärteil von τ bezeichnet. Diese Identität war schon in den 1980er Jahre voneinander unabhängig von Borcherds, Koike, Norton und Zagier (MPIM) gefunden worden. Die hier relevante quadratischen Form ist $Q(x) = x_1x_2 + x_3x_4$ mit der Isometriegruppe $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$, dem symmetrischen Raum $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und $O(Q)(\mathbb{Z})) = SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$.

Produktdarstellungen dieser Art gibt es auch für elliptische Modulformen. So zeigte Jacobi schon im 19. Jahrhundert die folgende Darstellung der Diskriminantenfunktion

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$$

mit einem für alle $\tau \in \mathbb{H}$ konvergierendem Produkt. Eholzer und Skoruppa bemerkten im Anschluss an Borcherds' Arbeiten, dass alle schwach holomorphen Modulformen eine für großes $\Im m(\tau)$ konvergente Produktdarstellung besitzen

$$f(\tau) = q^h \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{c(n)},$$

wobei die Exponenten $c(n)$ jedoch in der Regel komplexe Zahlen sind. Das Bemerkenswerte an der Produktdarstellung von $j(\tau_1) - j(\tau_2)$ (wie auch an Jacobis Formel) ist, dass die in dem Produkt auftauchenden Exponenten wieder die q-Entwicklungskoeffizienten einer anderen Modulform sind.

Borcherds erkannte, dass dieses Phänomen nicht nur auf die sehr speziellen quadratischen Formen, die im Zusammenhang mit verallgemeinerten Kac-Moody-Algebren auftauchen, beschränkt ist. Er konnte zeigen, dass es für jede gerade unimodulare quadratische Form Q der Signatur $(n, 2)$ einen Lift gibt, der schwach holomorphe Modulformen mit ganzen Koeffizienten $f(\tau) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} c(n) q^n$ vom Gewicht $1 - n/2$ auf Modulformen (mit Charakter) $\Psi(f)$ für $O(Q)(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}_n$ abbildet. Diese Lifts $\Psi(f)$ sind für $n \geq 2$ vom Gewicht $c(0)/2$ (beziehungsweise $c(0)$ für $n = 1$) und besitzen in geeigneten Koordinaten $(q_1, , \ldots, q_n)$ Produktdarstellungen

$$\Psi(f)(q_1, \ldots, q_n) = q^h \prod_{m \in \mathbb{Z}^{n+}} (1 - q^m)^{c(-Q(m))},$$

wobei $m = (m_1, \ldots, m_n)$ über die Elemente in $\mathbb{Z}^n$ läuft, für die eine gewisse Linearform $l(m) = a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n > 0$, $q^m = q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{m_n}$ und h aus $\mathbb{Q}^n$ ist. Da die Exponenten auch negativ sein können, sind diese *Borcherdsprodukte* genannten Lifts im Allgemeinen meromorph.

Die Null- und Polstellen eines Borcherdsprodukts $\Psi(f)$ (Polstellen sind die Nullstellen von $1/\Psi(f)$) sind ablesbar am *Hauptteil* $\sum_{n=-n_0}^{-1} c(n) q^n$ von f. Sie sind die Vereinigungen von sogenannten *Heegner-Divisoren*

$$H(m) \subseteq O(Q)(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_n.$$

Die Heegner-Divisoren $H(m)$ sind für $m < 0$ definiert und treten in der Null- beziehungsweise in der Polstellenmenge von $\Psi(f)$ mit der Multiplizität $c(m)$ auf, je nach Vorzeichen von $c(m)$ in der Null- oder in der Polstellenmenge. Für $n = 1$ z. B. besteht der Heegner-Divisor $H(-1)$ aus dem Punkt $i \in SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ (genauer gesagt seiner $SL_2(\mathbb{Z})$-Bahn), und allgemeiner ist $H(m)$ eine Vereinigung von endlich vielen *CM-Punkten*. CM-Punkte sind Punkte, deren zugehörige Gitter zusätzliche Endomorphismen $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ besitzen. So entspricht z. B. dem Punkt i das Gitter $\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}i$, das unter Multiplikation mit i invariant ist und damit i als zusätzlichen Endomorphismus besitzt.

Für $n = 1$ hat z. B. die Jacobische Thetareihe $\theta(\tau, x^2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}$ das Gewicht $1/2 = 1 - 1/2$ und liftet sich zu $\Delta^{1/12}$, einer Modulform mit Charakter vom Gewicht 1. Die Bezeichnung „mit Charakter" deutet an, dass $\Delta^{1/12}$ nur eine mit einem Charakter von $SL_2(\mathbb{Z})$ modifizierte modulare Transformationeigenschaft besitzt. Sie hat weder Null- noch Polstellen, was dem fehlenden Hauptteil von $\theta(\tau, x^2)$ entspricht.

Für $n = 2$ und $Q(x) = x_1x_2 + x_3x_4$ ist die konstante Funktion 1 vom Gewicht 0 und ohne Hauptteil, und sie liftet sich zu $(\Delta(\tau_1)\Delta(\tau_2))^{1/12}$ vom Gewicht 1. Die Modulform $J(\tau)$ dagegen ist ohne konstanten Term und mit dem Hauptteil q^{-1}, und sie liftet sich zu der Modulform $j(\tau_1) - j(\tau_2)$ vom Gewicht 0. Allgemeiner ist der Lift einer schwach holomorphen Modulform vom Gewicht 0 mit Haupteil q^{-m} und ohne konstanten Term die Modulform $\Phi_m(j(\tau_1), j(\tau_2))$, wobei Φ_m das m-te *modulare Polynom* ist. Seine Nullstellenmenge in $(SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}) \times (SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})$ ist der Graph des m-ten Hecke-Operators, damit die Vereinigung von gewissen Modulkurven, und entspricht dem Heegner-Divisor $H(-m)$. Für $m = 1$ ist z. B. $H(-1)$ die Diagonale im Produkt. Für andere Formen vom Rang 4 tauchen die bekannten Hirzebruch-Zagier-Zykeln als Heegner-Divisoren auf.

Für $n = 3$ kann man noch in Einzelfällen Borcherdsprodukte mit bekannten (sogenannten Siegelschen) Modulformen identifizieren, für größere n weiß man sehr wenig.

Wenige Jahre später brachte eine Rechnung der Stringtheoretiker Harvey und Moore neue Einblicke in die Borcherdsprodukte. Sie betrachteten (vielleicht erstmalig) Thetalifts schwach holomorpher Modulformen und berechneten den von $J(\tau)$ als den Logarithmus des Absolutbetrags des Borcherdsprodukts von $j(\tau_1) - j(\tau_2)$, also als

$$\log |q_1^{-1} \prod_{\substack{k>0 \\ l>-\infty}} (1 - q_1^k q_2^l)^{c(kl)}|.$$

Die im Thetalift auftretenden Integrale sind in dieser Situation divergent und müssen, um Sinn zu ergeben, erst regularisiert werden. Borcherds griff diese Methode auf und verallgemeinerte so den Borcherdslift auf den Fall nichtunimodularer quadratischer Formen.

Bruinier bewies in Umkehrung, dass meromorphe Modulformen, deren Null- und Polstellenmenge die Vereinigung von Heegner-Divisoren sind, Borcherdsprodukte sind. Heim (ein regelmäßiger Gastforscher am MPIM) und Murase gaben für holomorphe Borcherdsprodukte eine weitere Charakterisierung an. Dazu führten sie „multiplikative Versionen" $T_n^{\uparrow}$ und $T_n^{\downarrow}$ von gewissen Hecke-Operatoren ein und zeigten mit analytischen Methoden (Fourier-Jacobi-Entwicklung), dass eine holomorphe Modulform F für $O(Q)(\mathbb{Z})$ genau dann ein Borcherdsprodukt ist, wenn für alle natürliche

Zahlen (oder auch nur für alle Primzahlen) n die folgende Symmetrie gilt:

$$T_n^{\uparrow} F = \pm T_n^{\downarrow} F.$$

In dem Fall $Q(x) = x_1 x_2 + x_3 x_4$ konnten Heim und Kaiser (MPIM) mit geometrischen Methoden zeigen, dass tatsächlich schon die Gültigkeit der Symmetrie für eine einzige Primzahl ausreicht, damit F ein Borcherdsprodukt ist. Dabei benutzten sie die Identifizierung von Punkten in $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ mit Isomorphieklassen elliptischer Kurven via der j-Funktion, um zu zeigen, dass dann in der Nullstellenmenge von F unendlich viele CM-Punkte liegen müssen. Dann wendeten sie einen Satz von André an, der besagt, dass dies die Heegner-Divisoren auf $(SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}) \times (SL_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H})$ schon charakterisiert. Andrés Satz ist ein Spezialfall der André-Oort-Vermutung, die insbesondere eine ähnliche Charakterisierung von Heegner-Divisoren im höherdimensionalen Fall formuliert. Daher ist die Suche nach vielen CM-Punkten auf Divisoren mit einer Symmetrie wie oben von Interesse und Gegenstand momentaner Forschung.