

QUANTENMECHANIK AUF GRAPHEN

PAVEL MNEV

ZUSAMMENFASSUNG. Wir diskutieren das Zählen von Pfaden, die entlang der Kanten eines Graphen verlaufen, als ein stark vereinfachtes Modell für das Feynmansche Pfadintegral in der Quantenmechanik.

Summary: We discuss the problem of counting paths going along the edges of a graph as a toy model for Feynman's path integral in quantum mechanics.

1. Pfade auf einem Graph

Ein Graph besteht aus Knoten und Kanten, wobei eine Kante jeweils zwei Knoten miteinander verbindet.

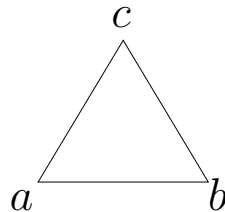


ABBILDUNG 1. Dreiecksgraph.

© Max-Planck-Institut für Mathematik/Mnev

Zur Vereinfachung werden hier nur sogenannte *einfache* Graphen betrachtet. Das sind Graphen, bei denen je zwei Knoten durch höchstens eine Kante verbunden sind und keine Kante eine "Schleife" bildet, d. h. dass sie einen Knoten mit sich selbst verbindet. Derartige Graphen werden festgelegt durch eine Menge V , deren Elemente *Knoten* genannt werden, zusammen mit einer anderen Menge E , die aus 2-elementigen Teilmengen von V besteht, den *Kanten*. So hat z. B. der Graph in **Abbildung 1** die Knotenmenge $V = \{a, b, c\}$ und die Kantenmenge $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$. Die *Adjazenz-* oder *Nachbarschaftsmatrix* eines solchen Graphen ist eine quadratische Matrix, deren Zeilen und Spalten durch die Knoten nummeriert sind und deren Einträge Nullen und Einsen sind:

$$M_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } u, v \in V.$$

Man kann (M_{uv}) als die Matrix eines linearen Operators $M : \mathbb{C}^V \rightarrow \mathbb{C}^V$ auffassen, wobei \mathbb{C}^V der komplexe Vektorraum mit der Basis $\{|v\rangle\}_{v \in V}$ ist und der lineare Operator M durch die Gleichung $M|v\rangle = \sum_{u \in V} M_{uv}|u\rangle$ bestimmt ist.

Umgekehrt bestimmt jeder lineare Operator $A : \mathbb{C}^V \rightarrow \mathbb{C}^V$ eine Matrix (A_{uv}) , deren Einträge in der Physik üblicherweise mit $\langle u|A|v\rangle$ bezeichnet werden.

Der *Laplace-Operator* zu einem Graphen Γ ist der Operator Δ mit den Matrixelementen

$$\Delta_{uv} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ -\text{val}(v) & \text{falls } u = v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } u, v \in V.$$

Hierbei bezeichnet $\text{val}(v)$ die *Valenz* des Knoten v , d. h. die Anzahl der Kanten, die v enthalten.

Beispiel. Für den Graphen aus **Abbildung 1** hat man

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$, für die $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}$ jeweils Kanten sind, bezeichnet man als einen *Pfad der Länge n* auf Γ , bei v_0 beginnend und bei v_n endend. So ist z. B. (a, b, c, a, c) ein Pfad der Länge 4 auf dem Graphen von **Abbildung 1**, der bei a beginnt und bei c endet.

Für einen Graphen Γ mit den Knoten $u, v \in V$ und einem reellen Parameter t gilt dann die Gleichung

$$(1) \quad \langle u | \exp(tM) | v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} p_n(u, v).$$

Hier bezeichnet $p_n(u, v)$ die Anzahl der Pfade der Länge n auf Γ , die bei v beginnen und bei u enden. Man kann die rechte Seite von (1) auch als eine Summe über alle Pfade γ interpretieren, die v mit u verbinden:

$$(2) \quad \langle u | \exp(tM) | v \rangle = \sum_{\text{Pfade } \gamma \text{ von } v \text{ nach } u} \frac{t^{|\gamma|}}{|\gamma|!}.$$

Hierbei ist $|\gamma|$ die Länge des Pfades.

Die Gleichung (1) ist elementar und lässt sich leicht begründen: Die Regeln der Matrizenmultiplikation liefern für die Matrixelemente der n -ten

Potenz der Adjazenzmatrix:

$$\langle u|M^n|v\rangle = \sum_{v_1, \dots, v_{n-1} \in V} \langle u|M|v_{n-1}\rangle \cdot \langle v_{n-1}|M|v_{n-2}\rangle \cdots \langle v_1|M|v\rangle$$

Die Summe auf der rechten Seite der Gleichung läuft über alle $(n-1)$ -Tupel von Knoten und der Summand zum Tupel (v_1, \dots, v_{n-1}) ist ein Produkt von Nullen und Einsen, das nur dann ungleich Null ist, wenn alle Paare $(u, v_{n-1}), (v_{n-1}, v_{n-2}), \dots, (v_1, v)$ Kanten sind. In diesem Fall ist aber $(v, v_1, \dots, v_{n-1}, u)$ ein Pfad und der Summand ist 1. Damit ist

$$(3) \quad \langle u|M^n|v\rangle = p_n(u, v)$$

einfach die Anzahl der Pfade der Länge n , die u mit v verbinden. Eingesetzt in die Potenzreihenentwicklung von $\exp(tM)$ erhält man die Formel (1):

$$\langle u|\exp(tM)|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle u|t^n M^n|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} p_n(u, v).$$

Ein Graph Γ wird *regulär von der Valenz k* genannt, wenn alle seine Knoten die gleiche Valenz k besitzen. Z. B. ist der Graph in **Abbildung 1** regulär von der Valenz 2.

Für reguläre Graphen der Valenz k nimmt die Gleichung (2) die folgende Form an:

$$(4) \quad \langle u|\exp(t\Delta)|v\rangle = \sum_{\text{Pfade } \gamma \text{ von } v \text{ nach } u} \frac{t^{|\gamma|}}{|\gamma|!} e^{-kt}$$

Dies folgt aus der Beobachtung, dass für reguläre Graphen Δ und M sich nur um ein Vielfaches der Einheitsmatrix unterscheiden: $\Delta = M - k \cdot \text{Id}$, und damit ist $\exp(t\Delta) = e^{-kt} \cdot \exp(tM)$.

Bemerkung. Die Gleichung (3) kann dazu benutzt werden, für zwei Ecken u, v die Anzahl der sie verbindenden Pfade von beliebiger Länge zu bestimmen, wenn das Eigenwertspektrum von M bekannt ist: sind $\psi^{(i)} \in \mathbb{C}^V$ die normalisierten Eigenvektoren von M mit den jeweiligen Eigenwerten λ_i und $\psi_w^{(i)}$ seine Koordinaten bzgl. der Basis $\{|w\rangle\}_{w \in V}$, so folgt aus (3), dass

$$(5) \quad p_n(u, v) = \sum_{i=1}^{|V|} \psi_u^{(i)} \lambda_i^n \bar{\psi}_v^{(i)}.$$

So kann man für den Graphen aus **Abbildung 1** für kleine n leicht die Pfade von a nach a mit vorgegebener Länge n auflisten:

n	Pfade von a nach a der Länge n	$p_n(a, a)$
0	(a)	1
1	keine Pfade	0
2	(aba), (aca)	2
3	(abca), (acba)	2
4	(abcba), (ababa), (abaca), (acbca), (acaca), (acaba)	6

Es ist klar, dass mit größer werdendem n eine solche direkte Berechnung mühsam wird. Eine explizite Diagonalisierung der Adjazenzmatrix dagegen gibt mittels der Formel (5) mühelos die Formel

$$p_n(a, a) = \frac{1}{3}(2^n + 2 \cdot (-1)^n)$$

für die Anzahl der a mit a verbindenden Pfade der Länge n .

Bemerkung. Ein Aufsummieren der Diagonaleinträge in den Gleichungen (2) und (4) liefert auch Formeln für die Anzahl *geschlossener* Pfade, also von Pfaden, die an dem gleichen Knoten starten, an dem sie auch enden:

$$(6) \quad \text{tr exp}(t\Delta) = \sum_{\text{geschlossene Pfade } \gamma} \frac{t^{|\gamma|}}{|\gamma|!} e^{-kt}.$$

Auf der linken Seite wird die *Spur* der Exponentialmatrix, also die Summe seiner Diagonaleinträge, gebildet.

Die Gleichung (6) kann zu einer anderen Gleichung verfeinert werden, auf deren rechter Seite nun anstatt über alle geschlossenen Pfade nur noch über “geschlossene Geodätische” summiert wird. Dabei heißt ein geschlossener Pfad *geschlossene Geodätische*, falls er lokal ein kürzester Pfad ist, d. h. falls er keine zwei aufeinanderfolgenden Kanten besitzt, die von einem Knoten zu einem anderen hin- und dann wieder zurücklaufen. Diese “Spurformel für einen regulären Graphen” [5] besitzt eine große Ähnlichkeit mit der berühmten Selbergschen Spurformel, die das Spektrum des Laplace-Operators auf einer hyperbolischen Fläche mit deren Längenspektrum von geschlossenen Geodätischen verbindet (hyperbolische Fläche sehen lokal wie der \mathbb{R}^2 aus, sind allerdings mit der nichteuklidischen Poincaré-Metrik versehen und besitzen daher einen anderen Begriff von lokal kürzester Verbindung als die euklidische Ebene).

2. Die Feynmansche Formulierung der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik betrachtet man ein Teilchen der Masse m im \mathbb{R}^N , das sich in einem Potenzialfeld $U(x)$ bewegt (d. h. $U(x)$ ist eine Funktion auf dem \mathbb{R}^N , dessen negativer Gradient die Kraft angibt, die das Feld auf das Teilchen ausübt). Zu einem festen Zeitpunkt wird der Zustand des

Systems durch eine komplexwertige Funktion $\Psi(x)$ auf dem \mathbb{R}^N festgelegt, der sogenannten *Wellenfunktion*. Die Schrödingergleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung des Zustands:

$$(7) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x) \right) \Psi(t, x).$$

Hier bezeichnet \hbar das Plancksche Wirkungsquantum und $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ den Laplace-Operator auf dem \mathbb{R}^N . Der auf der rechten Seite von (7) in Klammern stehende Differentialoperator ist der Schrödinger-Operator \hat{H} . Er wirkt auf den Raum der Zustände $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$, also auf den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem \mathbb{R}^N , und Ψ ist ein Element darin. Von einem Zustand $\Psi(t_0, x)$ zum Zeitpunkt t_0 aus startend legt die Schrödingergleichung den Zustand $\Psi(t, x)$ für alle späteren Zeitpunkte fest. So hat der Zustand zu einem Zeitpunkt $t_1 > t_0$ die Form:

$$\Psi(t_1, x) = \int_{\mathbb{R}^N \ni y} d^N y K(t_1 - t_0; x, y) \Psi(t_0, y).$$

Hier ist K eine gewisse Funktion auf dem $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, die man durch Lösen der Schrödingergleichung (7) erhält und *Greenfunktion* oder *Propagator* nennt. Nach Definition ist K der Integralkern des Operators $\mathcal{K}(t_1 - t_0) = \exp\left(-\frac{i(t_1 - t_0)\hat{H}}{\hbar}\right)$ auf \mathcal{H} .

Feynman schlug die folgende Darstellung des Propagators als ein Integral über den Raum der parametrisierten Pfade vom Punkt y zum Punkt x vor:

$$(8) \quad K(t_1 - t_0; x, y) = \int_{\text{Pfade } x(\tau): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ mit } x(t_0)=y, x(t_1)=x} \mathcal{D}[x(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]}.$$

Hier ist $S[x(\tau)] = \int_{t_0}^{t_1} d\tau \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x(\tau)) \right)$ das aus der klassischen Mechanik wohlbekannte *Wirkungsfunktional* für die Bewegung eines (klassischen) Teilchens in einem Potentialfeld, angewendet auf den Pfad $x(\tau)$.

Das auf der rechten Seite der Gleichung (8) auftretende “Integral über die Pfade” ist ein philosophisch sehr ansprechendes Konzept, da es die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems auf Begriffe der klassischen Mechanik, wie die Bahn eines Teilchens und das klassische Wirkungsfunktional, zurückführt. Jedoch ist es ziemlich schwierig, diesen Begriff mathematisch präzise zu definieren. Das gilt insbesondere für das Maß $\mathcal{D}[x(\tau)]$ auf der Menge der Pfade. Im Folgenden werden einige mathematische Ansätze zur Definition des Pfadintegrals diskutiert.

- Es gibt eine maßtheoretische Definition aus der Theorie der Brownschen Bewegung und des Wiener-Integrals. Dieser Zugang erfordert

einen subtilen analytischen Fortsetzungsprozess in \hbar , das hier als eine Variable aufgefasst wird.

- Der Feynmansche Zugang [4]: hier approximiert man den unendlichdimensionalen Raum aller Pfade im \mathbb{R}^N durch endlichdimensionale Räume von stetigen, stückweise linearen Pfaden, die innerhalb der Intervalle $\tau \in (t_0, t_0 + \delta t), (t_0 + \delta t, t_0 + 2\delta t), \dots, (t_0 + (n - 1)\delta t, t_1)$ linear verlaufen, aber zu den Zeitpunkten $\tau = t_0 + j \cdot \delta t$ ihre Richtung ändern dürfen. Dabei ist $\delta t = \frac{t_1 - t_0}{n}$ und $1 \leq j \leq n - 1$. Die Integrale über diese endlichdimensionalen Räume sind wohldefiniert und unter geeigneten Annahmen an das Potenzial existieren auch ihre Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$ und die Formel (8) wird zu einem mathematischen Theorem.
- Die *Methode der stationären Phase* erlaubt eine Beschreibung des asymptotischen Verhaltens für $\hbar \rightarrow 0$ von Integralen schnell oszillierender Funktionen, wie sie in Gleichung (8) auftreten, wenn die Integrationsbereiche endlichdimensional sind. Sie sind die Summe von Beiträgen, die durch das Verhalten der Phase S in der Nähe seiner kritischen Punkte, also den Nullstellen seiner Ableitung ∇S , bestimmt sind und in die das Integrationsmaß nicht eingeht. Diese Beiträge machen auch im unendlichdimensionalen Kontext des Pfadintegrals Sinn, sodass man die Formel für die stationäre Phase zur Definition des Pfadintegrals heranziehen kann. Dies definiert das Pfadintegral allerdings nur als eine formale Potenzreihe in \hbar , die unter Umständen für kein $\hbar \neq 0$ konvergieren muss. Die kritischen Punkte des Wirkungsfunktional $S[x(\tau)]$ sind genau die Pfade, die der klassischen Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -\nabla U(x)$ genügen. Von diesem Standpunkt aus betrachtet beschreibt das asymptotische Verhalten des Pfadintegrals für $\hbar \rightarrow 0$ die formale Umgebung der durch die klassische Bewegungsgleichung festgelegten Bahn im Raum aller Bahnen.

3. Kombinatorische Quantenmechanik

Auf einem regulären Graphen Γ ist ein ‘‘Zustand’’ Ψ eine komplexwertige Funktion auf der Menge der Knoten. Die ‘‘Schrödingergleichung’’ $\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = \Delta\Psi(t)$ ¹ hat die Lösung $\Psi(t_1) = e^{(t_1-t_0)\Delta}\Psi(t_0)$, wobei Δ jetzt den Laplace-Operator auf dem Graphen bezeichnet. Der Operator $K(t_1 - t_0) = e^{(t_1-t_0)\Delta}$ beschreibt die zeitliche Entwicklung und seine Matrixelemente werden durch

¹Die beschriebene kombinatorische Quantenmechanik entspricht der Situation mit verschwindendem Potenzial in (7). Zur Vereinfachung werden die in (7) auftretenden physikalischen Konstanten wie $i\hbar$, $-\hbar^2/(2m)$ zu 1 normiert.

(4) gegeben:

$$\langle u | \exp(t\Delta) | v \rangle = \sum_{\text{Pfade } \gamma \text{ von } v \text{ nach } u} \frac{t^{|\gamma|}}{|\gamma|!} e^{-kt},$$

was eine sehr große Ähnlichkeit mit der Feynmanschen Formel (8) besitzt. Anstelle des obskuren Pfadintegrals tritt in dieser Formel allerdings eine Summe über Pfade auf einem Graphen und ist eine für alle t absolut konvergente Reihe.

Hier ist ein kleines Wörterbuch:

Quantenteilchen im \mathbb{R}^N	Kombinatorische Quantenmechanik auf einem Graphen
Punkte im \mathbb{R}^N	Knoten auf Γ
Zustandsraum $L^2(\mathbb{R}^N)$	von Knoten aufgespannter Raum \mathbb{C}^V
Wellenfunktion	Elemente im \mathbb{C}^V
Schrödinger-Operator \hat{H}	Laplace-Operator auf dem Graphen
Propagator $K(t; x, y)$	Matrizelemente von $e^{t\Delta}$
Feynmans Pfadintegral	Summe über die Pfade auf Γ

Tatsächlich erhält man die Feynmansche Pfadintegralformel (8) als einen Grenzwert seines kombinatorischen Analogons (4), indem man den \mathbb{R}^N durch einen Gittergraphen approximiert und die Maschenweite gegen 0 gehen lässt. Einen *Gittergraphen* auf einem 2-dimensionalen Torus bekommt man, wenn man ein kariertes Blatt Papier um einen Fahrradschlauch wickelt (siehe **Abbildung 2**). Lässt man die Größe der Quadrate gegen 0 und die Größe des Torus gegen ∞ gehen und ersetzt man den 2-dimensionalen durch einen N -dimensionalen Torus, so erhält man bei sorgfältiger Reskalierung der Parameter die “physikalische” Quantenmechanik auf dem \mathbb{R}^N als einen Limes der kombinatorischen Quantenmechanik auf dem Gittergraphen. Man kann dabei sehr explizit sehen, wie die Matrizelemente von $\exp(t\Delta)$ gegen den Propagator $K(t; x, y)$ (für verschwindendes Potenzial U) und die Summe über die Pfade auf dem Graphen gegen Feynmans Interpretation des Pfadintegrals als einen Limes von Pfadintegralen über Räume von stetigen, stückweise linearen Pfaden konvergieren (siehe Gleichungen (4) und (8)).

Ebenfalls werden auch kombinatorische Versionen von Wittens “supersymmetrischer Quantenmechanik” betrachtet [8]. In diesen wird der Graph durch einen zellulären Komplex ersetzt, ein höherdimensionales Analogon eines Graphen, der durch Verkleben von Zellen verschiedener Dimensionen entsteht (bei Graphen werden 1-dimensionale Zellen, nämlich Kanten, entlang von 0-dimensionalen Zellen, den Knoten, verklebt). Anstatt über Pfade

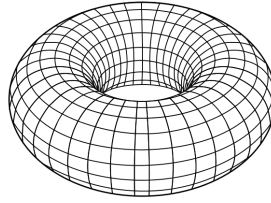


ABBILDUNG 2. Gittergraph auf einem Torus T^2 .

© <http://de.wikipedia.org>, Datei von ihrem Urheber zur uneingeschränkten Nutzung freigegeben

summiert man hier über Folgen von Zellen, deren Dimensionen für ein festes j zwischen j und $j + 1$ hin- und herwechseln, gewichtet mit einem von j abhängigen Vorzeichen. Als Schrödinger-Operator fungiert ein Operator der Form $dd^* + d^*d$, wobei d der Korandoperator auf zellulären Koketten und d^* sein mittels dem Hodge-Stern-Operator gebildetes Dual ist, und der in direkter Analogie zum Laplace-Operator auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert ist (eine Riemannsche Mannigfaltigkeit sieht lokal wie der \mathbb{R}^n aus und trägt eine i. A. von der Standardmetrik des \mathbb{R}^n verschiedene Metrik, die den Hodge-Stern-Operator und den Laplace-Operator festlegt).

4. Quantenfeldtheorie auf Graphen

Eine fundamentale Größe einer Quantenfeldtheorie mit Wirkungsfunktional S ist ihre Zustandssumme. Diese ist ein Integral der Form

$$(9) \quad Z = \int_{\text{Felder}(\Gamma) \ni \phi} \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S(\phi)}.$$

In einer kombinatorischen Feldtheorie spielt ein Graph Γ die Rolle von Raum-Zeit und

- $\text{Felder}(\Gamma)$ (der “Raum aller Felder”) ist der \mathbb{R}^V , d. h. ein “Feld” ist eine Funktion auf der Menge der Knoten von Γ .
- $S(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V} \phi(u) (-\Delta + m^2 \cdot \text{Id})_{uv} \phi(v) + \sum_{u \in V} F(\phi(u))$ ist das “Wirkungsfunktional”; dabei ist m ein positiver Parameter, der für die Masse des dem Feld zugehörigen Quantenteilchens steht, und $F(x) = \sum_{k=3}^K \frac{f_k}{k!} x^k$ ist ein Polynom, das die Selbstwechselwirkung dieser Theorie beschreibt.
- $D\phi = \prod_{u \in V} d\phi(u)$ (ein Maß auf dem “Raum der Felder”) ist das Lebesgue-Maß.

Parallel zu der Zustandssumme (9) betrachtet man die sogenannten “ n -Punktkorrelationsfunktionen”. Diese sind Integrale der Form

$$(10) \quad \langle \phi(u_1) \cdot \phi(u_2) \cdots \phi(u_n) \rangle := \frac{1}{Z} \int_{\text{Felder}(\Gamma) \ni \phi} \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S(\phi)} \phi(u_1) \cdot \phi(u_2) \cdots \phi(u_n),$$

wobei u_1, \dots, u_n ein n -Tupel von Knoten von Γ ist.

4.1. Das freie skalare Feld. Im Fall $F = 0$ (das ist die wechselwirkungsfreie skalare Theorie) erlaubt die Formel (1), die Zustandssumme bzw. die 2-Punktkorrelationsfunktion (der sogenannte “Propagator” der Feldtheorie) als eine Summe über alle geschlossenen Pfade bzw. über alle Pfade, die zwei vorgegebene Knoten miteinander verbinden, zu schreiben. Ist der Graph Γ die Vereinigung von zwei disjunkten Untergraphen Γ_1 und Γ_2 , die über Kanten e_1, \dots, e_N miteinander verbunden sind, so lassen sich die Zustandssumme und der Propagator für Γ aus den entsprechenden Größen für Γ_1 und Γ_2 mittels “Verklebformeln” berechnen [3]. Angewandt auf Gittergraphen in beliebiger Dimension, wie sie in Abschnitt 3 betrachtet wurden, ergeben diese Formeln im Limes für eine gegen 0 gehende Maschenweite bekannte Verklebformeln für die Determinante und die Greenfunktion des Laplace-Operators auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten [3, 7].

4.2. Die Theorie mit Wechselwirkung. Im Fall von nichtverschwindender Wechselwirkung F kann man das Integral (9) als ein gestörtes Gaußintegral ansehen. Dieser Gesichtspunkt führt zu einer Darstellung des Integrals (9) als eine Summe über Graphen γ (sogenannte “Feynman-Diagramme”) mit Valenzen ≥ 3 , wobei die jeweiligen Beiträge Φ_γ selber Ausdrücke in den Propagatoren der freien Theorie sind (siehe 4.1). Mittels einer Pfadsummenformel aus [3] kann der einzelne Beitrag Φ_γ wiederum geschrieben werden als eine Summe über “kombinatorische Abbildungen” $\gamma \rightarrow \Gamma$ von gewissen Beiträgen. Hierbei bildet eine kombinatorische Abbildung $\gamma \rightarrow \Gamma$ zwar die Knoten von γ auf die Knoten von Γ ab, die Kanten von γ jedoch werden auf Pfade in Γ abgebildet. Wie in der freien Theorie gibt es wieder eine Verklebformel, die den Wert von Φ_γ für einen zusammengeklebten (Raum-Zeit-) Graphen $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ aus den Werten von Φ_{γ_1} für Γ_1 und von Φ_{γ_2} für Γ_2 berechnet, wobei man für γ_1, γ_2 alle möglichen Paare von Graphen betrachten muss, in die sich $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ zerlegen lässt.

Die Entwicklung der Details dieses Modells und seine möglichen Erweiterungen ist Gegenstand momentaner Forschung von Santosh Kandel und Pavel Mnev (MPI für Mathematik).

Dieses Modell gibt (allerdings nur im Rahmen der kombinatorischen Quantenmechanik) eine konkrete Realisierung einer Quantenfeldtheorie, wie sie Segal in [6] postuliert hat. In Segals Beschreibung ordnet (vereinfacht

ausgedrückt) eine n -dimensionale Quantenfeldtheorie jeder randlosen kompakten $n-1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit Σ einen Hilbertraum von Zuständen \mathcal{H}_Σ zu und jeder n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M einen Vektor $Z_M \in \mathcal{H}_{\partial M}$ (seine ‘‘Zustandssumme’’). Diese Zuordnung sollte multiplikativ bezüglich disjunkter Vereinigung und verträglich mit Verkleben n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten längs Randkomponenten sein:

$$Z_{M_1 \cup_\Sigma M_2} = \langle Z_{M_1}, Z_{M_2} \rangle_\Sigma,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ das Skalarprodukt im Hilbertraum \mathcal{H}_Σ bezeichnet.

Cattaneo, Mnev und Reshetikhin entwickeln in [1, 2] eine störungstheoretische Quantisierung von Eichtheorien auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Dieses Programm liefert spezielle Beispiele von Quantenfeldtheorien im Sinne von Segal, deren Zustandssummen mittels Feynman-Diagrammen beschrieben werden und deren Werte sich durch Integrale von (Produkten von) Propagatoren über Konfigurationsräumen von Punkten auf der Mannigfaltigkeit berechnen lassen. Diese Feynman-Diagramme genügen ähnlichen Regeln bzgl. dem Verkleben von Mannigfaltigkeiten wie sie im kombinatorischen Fall für das Verkleben von (Raum-Zeit-)Graphen oben beschrieben wurden. Das macht die kombinatorische Quantenfeldtheorie zu einer (kombinatorischen) Realisierung des in [1, 2] beschriebenen Programms.

Ebenso wie die kombinatorische Quantenmechanik kann auch die kombinatorische Quantenfeldtheorie für den Spezialfall eines Netzgitters betrachtet und sein Limes für eine gegen 0 gehende Maschengröße studiert werden mit dem Ziel, im Grenzwert eine physikalische Quantenfeldtheorie auf dem \mathbb{R}^N zu erhalten. Dies erweist sich als ein diffiziler Prozess und benötigt eine geeignete Reskalierung der in dem Wechselwirkungsterm F auftretenden Koeffizienten. Es ist ein Modell für die Renormalisierung in der Quantenfeldtheorie.

Literatur

- [1] A. S. Cattaneo, P. Mnev, N. Reshetikhin, *Classical BV theories on manifolds with boundary*, Comm. Math. Phys. 332 2 (2014) 535–603.
- [2] A. S. Cattaneo, P. Mnev, N. Reshetikhin, *Perturbative quantum gauge theories on manifolds with boundary*, arXiv:1507.01221 (math-ph).
- [3] S. Del Vecchio, *Path sum formulae for propagators on graphs, gluing and continuum limit*, ETH Master thesis (2012) unter der Betreuung von P. Mnev.
- [4] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, New York: McGraw-Hill (1965).
- [5] P. Mnev, *Discrete path integral approach to the Selberg trace formula for regular graphs*, Comm. Math. Phys. 274 1 (2007) 233–241.
- [6] G. B. Segal, *The definition of conformal field theory*, Differential geometrical methods in theoretical physics. Springer Netherlands (1988) 165–171.

- [7] N. Reshetikhin, B. Vertman, *Combinatorial quantum field theory and gluing formula for determinants*, Lett. Math. Phys. 105 3 (2015) 309–340.
- [8] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom 17 4 (1982) 661–692.