Existenzsätze in der Einbettungstheorie

Grigori Avramidi

Zusammenfassung: Die Einbettungstheorie ist der Teil der Topologie, die die Frage der Einbettbarkeit eines Raums in einen anderen Raum untersucht. Über die Einbettungen von Graphen in die Ebene ist viel bekannt, ebenso wie über Einbettungen der Kodimension größer als zwei. Jüngste Arbeiten konzentrieren sich auf die Frage der Einbettbarkeit im Fall der Kodimension zwei und verbinden sie mit der Lösbarkeit gewisser Gleichungen in Gruppen.

Abstract: Embedding theory is a part of topology which studies whether a given space can be placed in a larger one. Much is known about embeddings of graphs and, in higher dimensions, about the situation when the dimensions of the spaces involved differ by at least three. Recent work focuses on the situation when the dimensions differ by two and relates embeddability to solvability of equations in groups.

Die Topologie beschäftigt sich mit den qualitativen Eigenschaften von Räumen. Dabei ist es oft hilfreich, diese Räume in andere, einfachere und schon gut verstandene *Standardräume* einzubetten, wie es zum Beispiel die aus dem Schulunterricht wohlbekannten euklidischen Räume sind. Je kleiner dabei ein solcher Standardraum ist, desto besser. Ein offensichtliches erstes Hindernis dafür stellen die Dimensionen der beteiligten Räume dar: man kann eine Gerade in eine Ebene einbetten, aber nicht eine Ebene in eine Gerade. Aber auch die Form des Raums spielt für seine Einbettbarkeit eine Rolle. Verklebt man zum Beispiel die Kanten eines Quadrates wie in **Abbildung 1** (a), so erhält man eine Fläche in Form eines Reifens, also einen 2-dimensionalen *Torus*, den man in den 3-dimensionalen euklidischen Raum einbetten kann. Verklebt man dagegen die Seiten des Quadrates wie in Abbildung 1 (b), so erhält man eine sogenannte *Kleinsche Flasche*, die keine solche Einbettung besitzt. Weitere Beispiele, die man gut visualisieren kann, kommen aus der Graphentheorie.

Graphen zeichnen in der Ebene

Ein Graph setzt sich zusammen aus seinen Ecken und aus seinen sie verbindenden Kanten. Manche Graphen lassen sich in die Ebene einbetten, andere dagegen nicht. Ein Beispiel für das Letztere ist der sogenannte *GWE-Graph* (Abbildung 1 (c)). Er besteht aus sechs Ecken, von denen drei Ecken Häuser und die restlichen drei Ecken die Versorger für Gas, Wasser und Elektrizität repräsentieren. Jedes Haus ist mit jedem Versorger durch eine Kante verbunden und weitere Kanten gibt es nicht. Ein weiteres Beispiel ist der vollständige Graph mit fünf Ecken (Abbildung 1 (d)): wie der Name schon sagt, besteht er aus fünf Ecken,

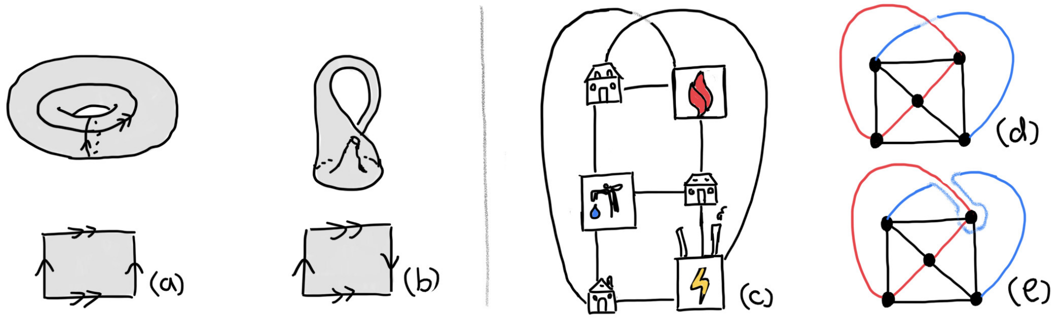

Abbildung 1: Der 2-dimensionale Torus (a), die Kleinsche Flasche (b), der GWE-Graph (c) und zwei verschiedene Abbildungen des vollständigen Graphen mit fünf Ecken (d) und (e).

und jede Ecke ist mit jeder anderen durch eine Kante verbunden. Wie immer man auch einen dieser beiden Graphen auf ein Blatt Papier zeichnet, es werden sich immer Kanten überschneiden. Versucht man zum Beispiel in Abbildung 1 (d) durch eine Neuverlegung der blauen Kante seinen Schnitt mit der roten Kante zu vermeiden, dann verschwindet zwar der ursprüngliche Schnittpunkt, aber es treten zwangsläufig neue Schnittpunkte auf (Abbildung 1 (e)). Dabei bleibt die Gesamtzahl der Schnittpunkte der aktiven, blauen Kante mit den anderen Kanten, die keine Ecke mit ihm teilen (in rot gezeichnet), immer ungerade, da diese zusammen eine geschlossene Kurve bilden. Indem man sukkzessive Kanten verlegt, kommt man von jeder Abbildung des vollständigen Graphen zu jeder anderen Abbildung, und man sieht so, dass die Gesamtzahl aller Schnittpunkte zwischen Kanten ohne gemeinsame Ecken immer ungerade ist. Die ungerade Parität dieser Gesamtzahl ist also eine Invariante des Graphen, die ihrer Einbettbarkeit im Wege steht. Ähnlich kann man auch für den GWE-Graphen argumentieren.

Nach einem klassischen Satz von Kazimierz Kuratowski verursachen die beiden in Abbildung 1 (c) und (d) gezeigten Graphen alle Fälle von Nicht-Einbettbarkeit von Graphen: jeder Graph, der nicht in die Ebene eingebettet werden kann, enthält einen dieser beiden (eventuell noch durch weitere Ecken unterteilten) Graphen.

Höherdimensionale Räume

Für die Einbettbarkeit von Räumen ineinander spielen ihre Dimensionen eine wichtige Rolle, ebenso wie ihre Differenz, die sogenannte *Kodimension*. So ist zum Beispiel jeder n-dimensionale Raum in den $(2n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum einbettbar, und zwar auf dieselbe Weise, wie man jeden Graphen in einen dreidimensionalen Raum einbetten kann, indem man Überschneidungen durch eine „kleine Ausweichbewegung in eine andere Dimension“ eliminiert (**Abbildung 2** (a)). Will man jedoch dieses Ergebnis verbessern, so trifft man auf Schnitte, die man auf diese Weise nicht vermeiden kann. In den frühen 1930er Jahren untersuchte Egbert van Kampen die Schnitte, die beim Versuch, einen n-dimensionalen Raum in den $2n$-dimensionalen euklidischen Raum einzubetten, auftreten. Er führte eine nach ihm benannte Obstruktion ein, die — mit der bemerkenswerten Ausnahme von $n = 2$ — vollständig festlegt, ob diese Schnitte vermeidbar oder unvermeidbar sind, und fand n-dimensionale Entsprechungen zu dem GWE-Graphen und dem vollständigen Graphen mit fünf Ecken, für die das Auftreten von Schnitten nicht vermieden werden kann [1].

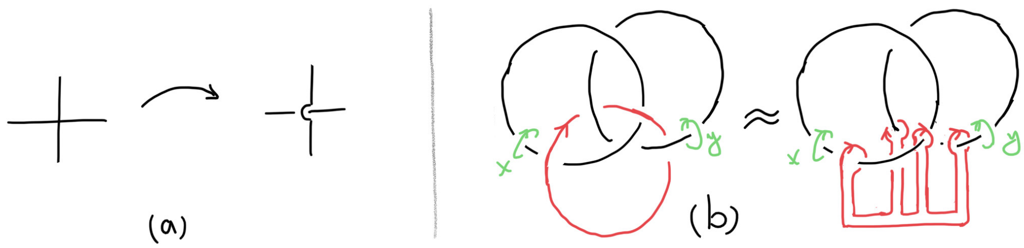

Abbildung 2: (a) Eine Überschneidung von Kanten im 3-dimensionalen Raum kann durch eine kleine Veränderung beseitigt werden. (b) Die *Borromäischen Ringe* bestehen aus drei Kreisen (zwei in schwarz, einer in rot), die paarweise nicht miteinander verschlungen sind, aber in ihrer Gesamtheit dennoch nicht trennbar sind. © MPI für Mathematik, G. Avramidi.

Gleichungen in Gruppen und Einbettungen der Kodimension 2

Seit den Arbeiten von van Kampen hat sich die höherdimensionale Einbettungstheorie weiterentwickelt und auch die Einbettbarkeit von n-dimensionalen Räumen in euklidische Räume der Dimensionen kleiner als $2n$ untersucht, wobei üblicherweise die Fälle von Kodimension 2 ausgelassen wurden. Der Grund für diese Auslassung besteht darin, dass die im Komplement einer Einbettung liegenden geschlossenen Kurven zu einem Punkt zusammengezogen werden können, falls die Kodimension 3 oder größer ist, dies dagegen in Kodimension 2 im Allgemeinen nicht möglich ist. So bilden zum Beispiel die geschlossenen Kurven (wobei wir hier durch Deformation auseinander hervorgehende Kurven als gleich ansehen) im Komplement zweier miteinander nicht verschlungener Kreislinien im 3-dimensionalen Raum eine nicht kommutative Gruppe, die von zwei Kreislinien x und y erzeugt wird, zwischen denen es keine Relationen gibt. Man kann diese zwei miteinander nicht verschlungenen Kreislinien zu den sogenannten *Borromäischen Ringen* ergänzen, indem man wie in Abbildung 2 (b) einen dritten (roten) Kreis hinzufügt. Dieser dritte Kreis entspricht dem Element $xyx^{-1}y^{-1}$ in der Gruppe. Die algebraische Aussage, dass x und y nicht miteinander vertauschen, also $xy \neq yx$, entspricht daher der topologischen Aussage, dass man diesen dritten Kreis nicht ohne gegenseitige Durchdringung von den restlichen zwei Kreislinien entfernen kann.

Inspiriert durch die Borromäischen Ringe konstruierten Michael Freedman, Vyacheslav Krushkal und Peter Teichner (MPIM) 1994 das erste Beispiel eines 2-dimensionalen *Komplexes* (das ist ein Raum mit Singularitäten), für den die van-Kampen-Obstruktion zwar verschwindet, der aber trotzdem nicht in den 4-dimensionalen euklidischen Raum einbettbar ist [2]. In jüngsten Arbeiten haben Tu Tam Nguyen Phan (Gast am MPIM 2020) und ich neue Beispiele gefunden, die nicht auf der Nichtvertauschbarkeit von x und y basieren, sondern stattdessen darauf, dass sich das Produkt x^3y^3 nicht als die dritte Potenz eines anderen Elements der Gruppe schreiben läßt [3]. Dies legt nahe, dass allgemein die Nichtlösbarkeit von gewissen Gleichungen in Gruppen Beispiele von 2-dimensionalen Komplexen liefern kann, die sich nicht in den 4-dimensionalen euklidischen Raum einbetten lassen, ein Ansatz für weitere zukünftige Forschung.

Literatur

[1] E. R. van Kampen, *Komplexe in euklidischen Räumen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **9** (1933), no. 1, 72–78. MR 3069580

[2] M. H. Freedman, V. S. Krushkal, and P. Teichner, *van Kampen's embedding obstruction is incomplete for* 2*-complexes in* $\mathbf{R}^4$, Mathematical Research Letters **1** (1994), no. 2, 167–176. MR 1266755

[3] G. Avramidi and T. T. Nguyen Phan, *Fungible obstructions to embedding* 2*-complexes*, Preprint verfügbar unter https://arxiv.org/abs/2105.10984 (2021).